

# D8. VSS 適応制御を用いた車輪型倒立振子に関する研究

発表者：9ADGM013 諸墨 享  
 指導教員：大内 茂人 教授  
 平田 弘志 准教授

## A Research on the Control of the Wheeled Inverted Pendulum by using VSS Adaptive Control

Abstract: So many papers with respect to the stabilization of the Inverted Pendulum are reported, because it is typically unstable system and is well used as example to verify many control theories. However, few approaches consider the Inverted Pendulum as unknown parameter system. This paper proposes a new VSS(Variable Structure System) adaptive control system including a self tuning controller for a Wheeled Inverted Pendulum whose whole parameters are unknown.

### 1. 研究の概要

倒立振子系の学術研究の歴史は古く、今日までに様々な種類の倒立振子および制御方法の研究報告がなされている。その理由として、倒立振子系は典型的な不安定系であることから制御理論の検証に向いていること、現代制御理論との相性の良さが挙げられる。

しかし研究が盛んな一方で、倒立振子の未知パラメータ系に関する研究報告はあまり多くない。また、全てのパラメータを未知とした倒立振子に関する研究はほとんどない。そこで本研究では、「全てのパラメータを未知とした車輪型倒立振子の倒立安定化制御を行うこと」を目的とし、VSS 適応制御系を用いて車輪型倒立振子の安定化制御を行う。

### 2. 運動方程式と基本パラメータ表現

Table.1 パラメータ表

名称	記号 [単位]
振子の質量	$M_p$ [kg]
振子の重心周りの慣性モーメント	$J_p$ [kgm <sup>2</sup> ]
タイヤの質量	$M_w$ [kg]
タイヤの重心周りの慣性モーメント	$J_w$ [kgm <sup>2</sup> ]
タイヤと路面との間の粘性摩擦係数	$\mu_1$ [kgm <sup>2</sup> /s]
振子とタイヤとの間の粘性摩擦係数	$\mu_2$ [kgm <sup>2</sup> /s]
タイヤの半径	$r$ [m]
振子の端から重心までの長さ	$l$ [m]
振子の重心位置	$x_p, y_p$ [m]
タイヤの重心位置	$x_w, y_w$ [m]
振子の角度	$\theta$ [rad]
振子からみたタイヤの角度	$\alpha$ [rad]
モータによるトルク	$\tau$ [Nm]
モータ電流	$i_a$ [A]
トルク定数	$k_t$ [Nm/A]

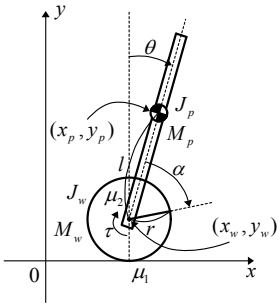


Fig.1 車輪型倒立振子のモデル図

Fig.1 で示される倒立振子の運動方程式は以下で表せる。

$$\begin{aligned} & \{J_w + J_p + (M_w + M_p)r^2 + M_p l^2 + 2M_p r l \cos \theta\} \ddot{\theta} \\ & + \{J_w + (M_w + M_p)r^2 + M_p r l \cos \theta\} \ddot{\alpha} - M_p g l \sin \theta - M_p r l \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} & \{J_w + (M_w + M_p)r^2 + M_p r l \cos \theta\} \ddot{\theta} + \{J_w + (M_w + M_p)r^2\} \ddot{\alpha} \\ & + \mu_2 \dot{\alpha} - M_p r l \dot{\theta}^2 \sin \theta + d_2 \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) = k_t i_a \end{aligned} \quad \dots(2)$$

ただし、 $g$  は重力加速度、 $d_2$  は車輪のクーロン摩擦係数、振子の粘性摩擦およびクーロン摩擦は微小とみなし無視している

式(1), (2)は物理パラメータを用いた記述であり、運動を表すには十分であるが、運動データから直接には推定困難である。そこで、運動方程式が完全に記述可能な基本パラメータを使用して記述する。基本パラメータに関する線形関係式は、

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{M}(\theta) \ddot{\theta} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + \mathbf{G}(\theta) + \mathbf{B} \dot{\theta} + \mathbf{D}(\dot{\theta}) \\ &= \Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \zeta \end{aligned} \quad \dots(3)$$

$$\begin{cases} \Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \end{bmatrix} \\ \zeta^T = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4 \ \zeta_5] = [I_1 \ I_2 \ w \ \mu_2 \ d_2] \\ \tau^T = [0 \ k_t i_a], \theta^T = [\theta \ \alpha] \\ \phi_{11} = \ddot{\theta}, \phi_{12} = \ddot{\theta} + \ddot{\alpha}, \phi_{13} = 2r\ddot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\alpha} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \theta \\ \phi_{22} = \ddot{\theta} + \ddot{\alpha}, \phi_{23} = r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta, \phi_{24} = \dot{\alpha}, \phi_{25} = \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) \\ I_1 = J_p + M_p l^2, I_2 = J_w + (M_w + M_p)r^2, w = M_p l \end{cases} \quad \dots(4)$$

として表せる。ここで、 $\Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$  は regressor 行列、 $\zeta$  は基本パラメータである。また、トルク定数  $k_t$  が不確定な場合を考慮して式(4)を次式のようにして使用する。

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \sigma \\ \mathbf{i}^T = [0 \ i_a], \sigma^T = \zeta^T / k_t = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5] \end{cases} \quad \dots(5)$$

$$\sigma_1 = I_1 / k_t, \sigma_2 = I_2 / k_t, \sigma_3 = w / k_t, \sigma_4 = \mu_2 / k_t, \sigma_5 = d_2 / k_t$$

また、推定モデルは以下であり  $\Phi^T(k)$  は  $\Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$  の  $k$  時刻を表す。

$$\mathbf{v}(k) = \Phi^T(k) \hat{\sigma}(k), \hat{\sigma}^T = [\hat{\sigma}_1 \ \hat{\sigma}_2 \ \hat{\sigma}_3 \ \hat{\sigma}_4 \ \hat{\sigma}_5] \quad \dots(6)$$

### 3. VSS 適応制御系

VSS 適応制御系の制御則および適応則を以下に示す。

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{Y}^T \hat{\mathbf{a}} + k_v \operatorname{sat}(s_c / \delta) \\ \dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Y} s_c \\ s_c = \dot{\theta} + h \theta \end{cases} \quad \dots(7)$$

ただし、 $\mathbf{Y}^T = [-h \dot{\theta} \ \theta \ \dot{\alpha}]$ ,  $u = i_a$ ,  $\hat{\mathbf{a}}$  は  $\mathbf{a}$  の推定パラメータ

$$\mathbf{a}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2] = \begin{bmatrix} \frac{J_1 J_4 - J_{23}^2}{J_{23} k_t} & -\frac{J_4 w g}{J_{23} k_t} & -\frac{\mu_2}{k_t} \end{bmatrix}$$

$$J_1 = J_w + J_p + (M_w + M_p)r^2 + M_p l^2 + 2M_p r l$$

$$J_4 = J_w + (M_w + M_p)r^2, J_{23} = J_w + (M_w + M_p)r^2 + M_p r l$$

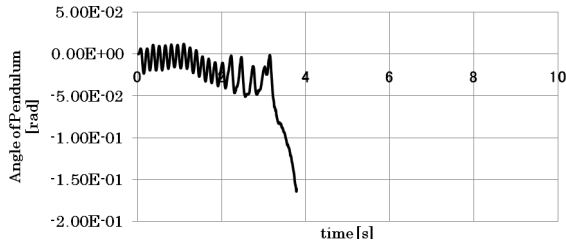
$$\operatorname{sat}(s_c / \delta) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(s_c) & |s_c| > \delta \\ s_c / \delta & |s_c| \leq \delta \end{cases}$$

VSS 適応制御系の設計パラメータを以下のように設定した。

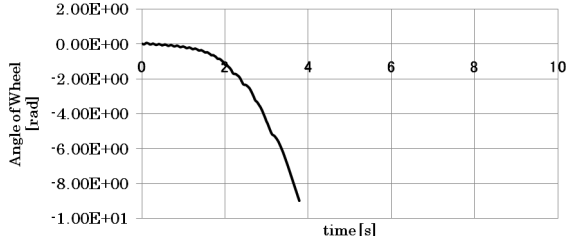
Table.2 VSS 適応制御系の設計パラメータ

VSS ゲイン	$k_v = 3$
VSS 適応ゲイン	$\mathbf{F} = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$
切換え係数	$h = 15$
線形領域	$\delta = 0.05$

VSS 適応制御系を用いた実機実験の結果を以下に示す。



(a) 振り角度  $\theta$  [rad]



(b) タイヤ角度  $\alpha$  [rad]

Fig.2 VSS 適応制御系の実験結果

タイヤ角度が一方方向に回転し続け、実験開始4秒ほどで転倒してしまう結果となった。VSS 適応制御系では、振り系の安定性はリアプノフの安定証明により安定保証しているが、車輪系の安定性は保証しておらず、車輪系の暴走がシステムを不安定にする原因だと考えられる。

#### 4. STC を組み込んだ VSS 適応制御系

倒立状態を保つ VSS 適応制御系に車輪系が安定となるような STC を組み込むことによって、振り系と車輪系の安定性を保証する制御系を考える。

まず、目標値  $r_f$  に振り角度  $\theta$  が追従する VSS 適応制御系を設計する。目標値追従 VSS 適応制御系の制御則および適応則は以下で与えられる。

$$\begin{cases} u = -Y^T \hat{a} + k_v \text{sat}(s_c/\delta) \\ \dot{\hat{a}} = -\Gamma^{-1} Y s_c \\ s_c = \dot{\theta} - \dot{r}_f \end{cases} \quad \dots(8)$$

ただし、 $e = \theta - r_f$ ,  $\dot{e} = \dot{\theta} - \dot{r}_f - h e$

$$Y^T = [-h \dot{\theta} \quad \theta \quad \dot{\alpha}], \quad u = i_a, \quad \hat{a} \text{ は } a \text{ の推定パラメータ}$$

$$a^T = [a_0 \quad a_1 \quad a_2] = \begin{bmatrix} \frac{J_1 J_4 - J_{23}^2}{J_{23} k_r} & -\frac{J_4 w g}{J_{23} k_r} & -\frac{\mu_2}{k_r} \end{bmatrix}$$

$$\text{sat}(s_c/\delta) = \begin{cases} \text{sgn}(s_c) & |s_c| > \delta \\ s_c/\delta & |s_c| \leq \delta \end{cases}$$

車輪系が安定となるような目標角度  $r_f$  を目標値追従 VSS 適応制御に与えることによって車輪系の安定化を計る。目標角度  $r_f$  は STC(Self Tuning Control)を設計し逐次計算することによって得られる。

振り角度  $\theta$  が目標値  $r_f$  に追従していると仮定すると以下の関係が成り立つ。

$$\ddot{\alpha} = -\frac{J_1}{J_{23}} \ddot{r}_f + \frac{w g}{J_{23}} r_f \quad \dots(9)$$

目標角加速度  $\ddot{r}_f$  を入力と考えると、式(9)は次の状態方程式

で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{r}_f \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{r}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{w g}{J_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ r_f \\ \dot{\alpha} \\ \dot{r}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{J_1}{J_{23}} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{r}_f \quad \dots(10)$$

ただし、未知パラメータ系を想定しているため式(10)内のパラメータは式(6)の基本パラメータ推定値  $\hat{\sigma}(k)$  を用いて表現する

振り目標角速度  $\dot{r}_f$  を制御入力と考えた式(10)のシステムにおいて次の評価関数、

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_o^T \mathbf{Q}_o \mathbf{x}_o + \dot{r}_f^T \mathbf{R}_o \dot{r}_f) dt \quad \dots(11)$$

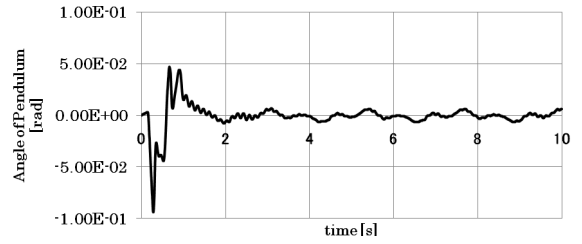
$$\text{ただし、} \mathbf{x}_o^T = [\alpha \quad r_f \quad \dot{\alpha} \quad \dot{r}_f]$$

を最小にするフィードバックゲイン  $\mathbf{F}_0$  を制御周期毎に求め、

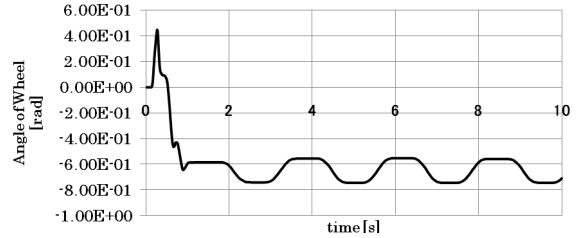
$$\begin{cases} \ddot{r}_f = -\mathbf{F}_0 \mathbf{x}_o \\ \mathbf{F}_0 = [f_{o1} \quad f_{o2} \quad f_{o3} \quad f_{o4}] \end{cases} \quad \dots(12)$$

を更新する。

STC を組み込んだ VSS 適応制御系を用いた実機実験の結果を以下に示す。



(a) 振り角度  $\theta$  [rad]



(b) タイヤ角度  $\alpha$  [rad]

Fig.3 STC を組み込んだ VSS 適応制御系の実験結果

STC を組み込むことによって、VSS 適応制御系によって全てのパラメータが未知である車輪型倒立振子の安定化制御が行われていることが確認できる。

#### 業績

諸墨享, 大内茂人, 平田弘志, “VSS 適応制御を用いた車輪型倒立振子の安定化制御に関する研究”, 第 11 回 SICE システムインテグレーション部門講演会, 103-3 (2010)

#### 参考文献

- (1) 平田弘志, 高部知博, 穴吹雅敏: “セルフチューニング制御器を組み込んだ回転型倒立振子の VSS ロバスト適応制御”, 電気学会論文誌 C(電子・情報・システム部門誌), Vol.128(2008), No.4 pp618-627
- (2) 深尾隆則, 安達紀彦: “倒立振子・台車系の部分的適応制御”, システム制御情報学会論文誌, 14, 5 pp259-264-