

## 標準 2 次系の特性根

標準 2 次系伝達関数  $G(s)$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

の減衰係数  $\zeta$  が  $0 \leq \zeta < 1$  のとき、その特性根は  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  で減衰振動系となる。また、 $\zeta = 1$  のとき  $s = -\omega_n$  の重根となり、さらに  $\zeta > 1$  のとき、 $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$  の 2 実根をもち、それぞれ非振動系となる。 $\zeta = 0$  の場合、特性根は  $s = \pm j\omega_n$  となり虚軸上に存在し、明らかに持続振動系となる。 $\omega_n$  一定として  $\zeta$  を変化させたときの特性根の位置を図 1 に示す。

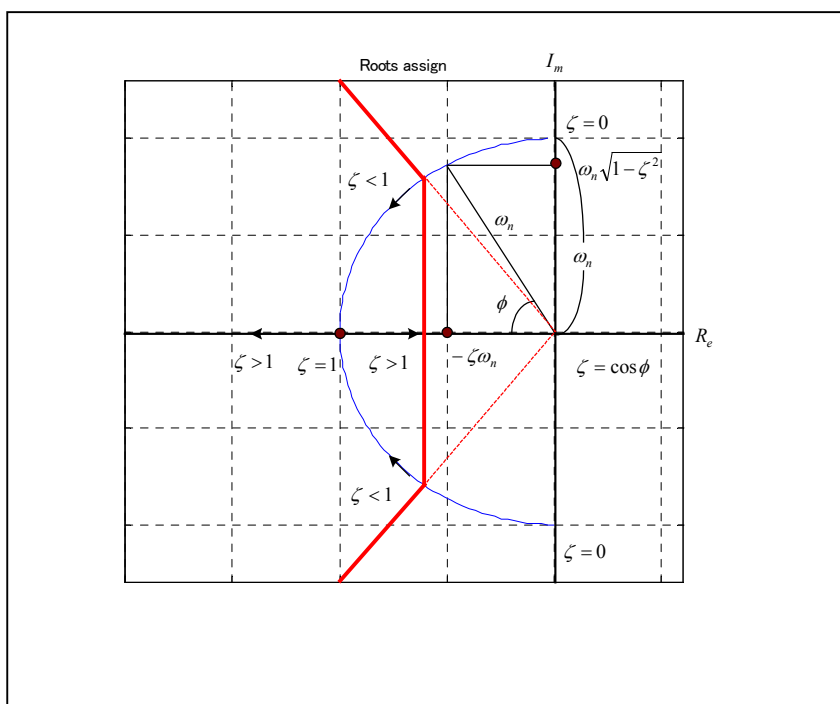


図 1 標準 2 次系の特性根の位置

**減衰係数  $\zeta$**  : 応答の減衰の度合いを表す。

**固有角周波数  $\omega_n$**  : 定常状態に達する速さを表す。

サーボ系では  $0.6 \leq \zeta < 0.8$  が目安とされ、 $\phi$  は  $37^\circ \leq \phi < 53^\circ$  程度である。

図中の赤色で示された線の左側が過渡応答特性の望ましい領域とされている。

この特性根の配置は**根軌跡**の考えと密接な関連を持っているので、その点に留意して欲しい。

## 根軌跡

**根軌跡**とは開ループ伝達関数のゲイン  $K$  を零から無限大に変化させたときの閉ループ特性根の描く軌跡のことである。

$$\text{開ループ伝達関数を } G_o(s) = k \frac{R(s)}{P(s)} = k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} \quad (1) \quad \text{とする。}$$

根軌跡の性質

**性質 1.** 根軌跡は開ループ伝達関数  $G_o(s)$  の  $n$  個極  $p_i$  から出発し、 $m$  個の零点  $z_i$  または  $n-m$  個の無限遠点に終わる。軌跡の数は極数  $n$  に等しく、また軌跡は実軸対称となる。

**性質 2.** 実軸上に極、零点が奇数個存在する左側の点は根軌跡の一部である。

**性質 3.** 無限遠点に向かう軌跡について、 $n-m$  本の漸近線の漸近角  $\varphi$  (正の実軸となす角) 及び実軸交点  $\sigma$  は以下のように与えられる。ただし、 $\ell$  は整数とする。

$$\varphi = \frac{(1+2\ell)\pi}{n-m}, \quad \sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad \sum_{i=1}^n p_i ; \text{極の総和、} \sum_{i=1}^m z_i \text{ 零点の総和}$$

**性質 4.** 軌跡の分離点は特性方程式  $1+G_o(s)=0$  より  $k = -\frac{p(s)}{R(s)} \equiv f(s)$  が得られるので、 $\frac{d}{ds} f(s) = 0$  の

根から適当な分離点 ( $f(s)$  が  $s$  について極値をもつ) を得る。

**性質 5.** 軌跡の虚軸交点はラウス配列の  $s^1$  行を零と置いてゲイン  $k$  を定めた後、 $s^2$  行から補助方程式を作り、その根から求める。あるいは、フルビッツ行列式が零となるようにゲイン  $k$  を定めた後、特性方程式が振動根  $s^2 + A$  をもつように因数分解して求める方法もある。

その理由について

**性質 1.** 特性根は特性方程式  $1+G_o(s)=0$  を満たすので

$$1+k \frac{R(s)}{P(s)} = 0 \Leftrightarrow \frac{R(s)}{P(s)} = -\frac{1}{k} \quad \text{このとき、} k \rightarrow 0 \text{ なら } p(s) \equiv 0 \text{ が成り立つ。}$$

$p(s) \equiv 0$  を満たす根  $s$  は開ループ伝達関数  $G_o(s)$  の  $n$  個の極  $p_i$  である。

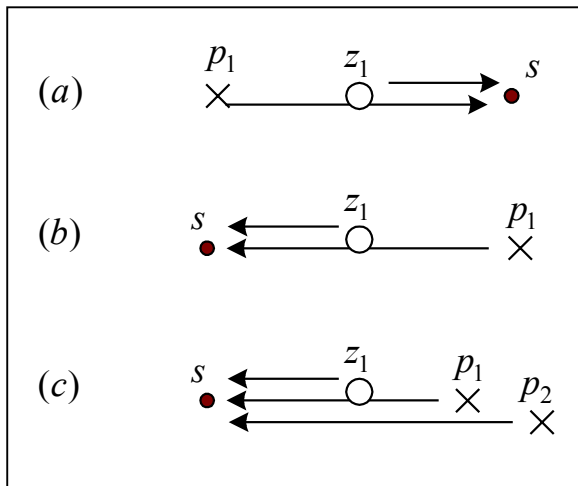
また、 $k \rightarrow \infty$  なら  $R(s) \equiv 0$  が成り立つ。

$R(s) \equiv 0$  を満たす根  $s$  は開ループ伝達関数  $G_o(s)$  の  $m$  個の零点  $z_i$  である。それ以外にはもし、 $n > m$  であるならば  $|s| \rightarrow \infty$  のとき  $\{R(s)/P(s)\} \equiv 0$  となる。ゆえに、軌跡の  $n-m$  個は無限遠点に到達する。

1 例として

$$\frac{R(s)}{P(s)} = \frac{s+b}{s(s+a)} \text{ の場合 } \quad \text{if } |s| \rightarrow \infty \quad \text{then } \frac{s+b}{s(s+a)} = \frac{1+\frac{b}{s}}{s+a} \rightarrow 0 \quad (1 \text{ 個は無無限遠点})$$

性質 2.  $G_o(s) = -1$  より  $G_o(s) = |G_o(s)| e^{\angle G_o(s)}$  と表記するとき  $-1 = e^{j(1+2\ell)\pi}$  であるから根軌跡は、常に  $|G_o(s)| = 1$  (振幅条件) 及び  $\angle G_o(s) = (1+2\ell)\pi$  (位相条件) を満足する。



(a) ある点  $s$  の左側にいくら極や零点があってもベクトルのなす角は零ゆえ位相条件を満たさない。

(b) ある点  $s$  の右側に極と零点が偶数個ある場合は位相条件を満たさない。

(c) ある点  $s$  の右側に極と零点が偶数個ある場合は位相条件を満たす。

性質 3.  $R(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ ,  $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_{m+1}s^{m+1} + a_m s^m + \dots + a_0$  とするとき、十分に大きな  $|s| \rightarrow \infty$  に対して近似的に

$$\text{if } |s| \rightarrow \infty \quad \text{then} \quad G_o(s) = k \frac{R(s)}{P(s)} = \frac{k}{s^{n-m} + a_{m-1}s^{n-m-1} + \dots + a_{m+1}s + a_m} \cong \frac{k}{s^{n-m}}$$

とみなすことができる。いま、ある点  $s$  の偏角を  $e^{j\varphi}$  とするとド・モアブルの定理より  $s^{-(n-m)}$  の偏角は  $(e^{j\varphi})^{-(n-m)} = e^{-j(n-m)\varphi}$  であり、根軌跡の位相条件を考慮すると  $(n-m)\varphi = (1+2\ell)\pi$  ゆえ漸近線の漸近角  $\varphi$  が得られる。

また、特性方程式  $1 + k \frac{R(s)}{P(s)} = 0$  より、 $\prod_{i=1}^n (s + p_i) + k \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$  が得られる。いま、次数差

が 2 以上 ( $n-m \geq 2$ ) のとき、 $s^{n-1}$  の係数は次のように  $s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \dots = 0$  と記述できる。

さらに、特性根を  $r_1, r_2, \dots, r_n$  と定義すると

$$s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \dots = s^n + \sum_{i=1}^n r_i s^{n-1} + \dots = 0$$

であるから、根軌跡では  $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n r_i$  (2) (極の総和 = 特性根の総和) が成立する。

$k \rightarrow \infty$  において  $r_i$  の  $m$  個は零点  $z_i$  へ近づき ( $r_i = z_i$ )、 $n-m$  個は無窮遠点に向かう。

いま、無窮遠点に向かう特性根を  $r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$  とすると、その総和は(2)式より

$$\sum_{i=m+1}^n r_i = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i$$

が成立する。無窮遠点に向かう  $n-m$  個の根  $r_i$  が単位質量をもつと考えると質点系の重心式が適用でき、漸近線の交点 (重心位置) が得られる。

$$\sigma = \frac{\sum_{i=m+1}^n r_i}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad [\text{参考}] \quad n \text{ 質点系の重心式} \quad \sigma = \frac{\sum_{j=1}^n m_j r_j}{\sum_{j=1}^n m_j}$$

数値例 資料の I コントローラ参照

開ループ（一巡）伝達関数  $G_o(s)$

$$G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+4)} \quad \text{の根軌跡}$$

性質 1 より  $n=3, m=0$  の軌跡は 3 本ある。軌跡の出発点は 0, -1, -4 であり、零点がないので 3 本ともに無限遠点に終わる。

性質 2 より実軸上の点 -4 の左側と点 -1 から点 0 の区間が軌跡の一部である。

性質 3 より漸近線の漸近角  $\varphi$  は

$$\varphi = \frac{(1+2\ell)\pi}{3} \text{ より } \frac{\pi}{3} (= 60^\circ), \pi (= 180^\circ), \frac{5\pi}{3} (= 300^\circ = -60^\circ) \text{ であり、}$$

その実軸との交点  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{0-1-4-0}{3} = -\frac{5}{3} \cong 1.67 \text{ である。}$$

性質 4 より軌跡の分離点は  $1+G_o(s)=0$  より

$$k = -s(s+1)(s+4) = -s^3 - 5s^2 - 4s \text{ であり } \frac{dk}{ds} = -3s^2 - 10s - 4 = 0 \text{ より 2 次方程式を解くと}$$

$$s_1 \cong -0.47, s_2 \cong -2.87 \text{ を得るが、軌跡の条件を満たすのは } s_1 \cong -0.47 \text{ である。}$$

性質 5 より軌跡の虚軸交点を求める。特性方程式

$$s^3 + 5s^2 + 4s + k = 0$$

が虚軸上に根（持続振動根）をもつ。ゆえにフルビッツ行列式  $H_3$  が

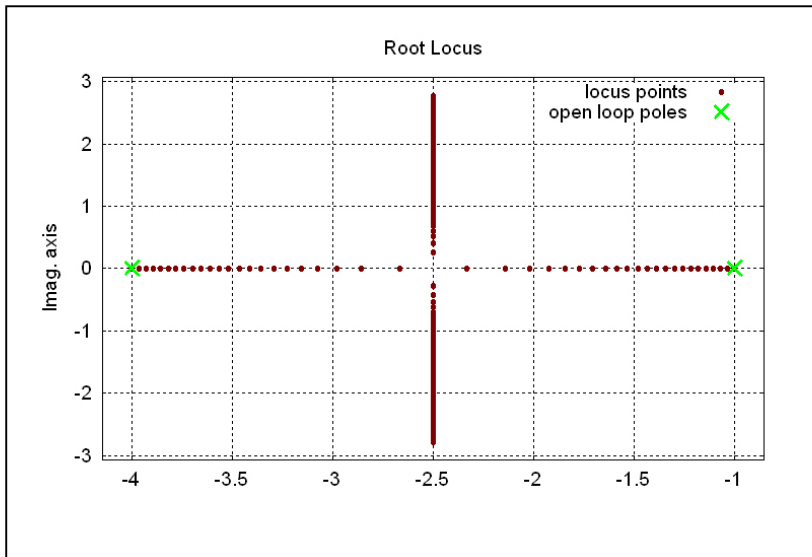
$$H_3 = \begin{vmatrix} 5 & k & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{となる零以外のゲイン } k \text{ は } k = 20 \text{ である。また、特性方程式の因数分解}$$

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 = (s^2 + A)(s + B) = 0$$

を考えると  $A=4, B=5$  が容易に得られる。したがって、 $s^2 + 4 = 0$  より虚軸交点は  $s = \pm 2j$  である。

以上を図示したものが以下の根軌跡である。

## 根軌跡の一例



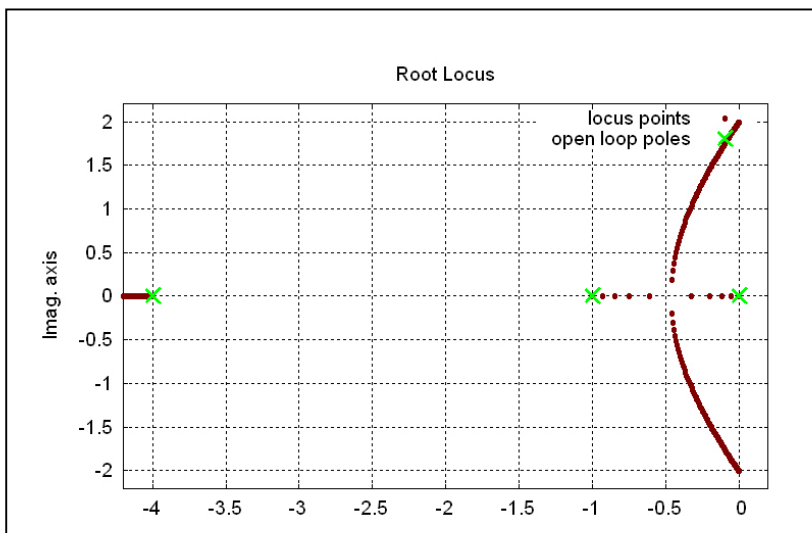
P型コントローラの一例

$$G = \frac{k}{(s+1)(s+4)}$$
 の根軌跡

軌跡分離点のゲイン  $k$  は 2.25 である。

```
% rlocus_p.m
% 根軌跡
W=tf2sys([1],[1 5 4]);

title('Root Locus')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
[r1,k]=rlocus(W,0.1,0,10);
k
rlocus(W,0.1,0,10)
```



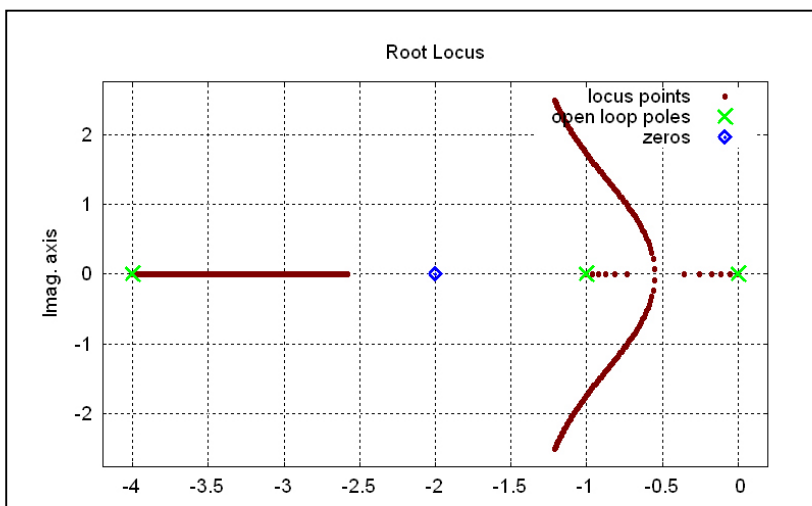
I型コントローラの一例

$$G = \frac{k}{s(s+1)(s+4)}$$
 の根軌跡

軌跡分離点のゲイン  $k$  は 0.88 である。

```
% rlocus_i.m
% 根軌跡
W=tf2sys([1],[1 5 4 0]);

title('Root Locus')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
[r1,k]=rlocus(W,0.1,0,10);
k
rlocus(W,0.2,0,20)
```



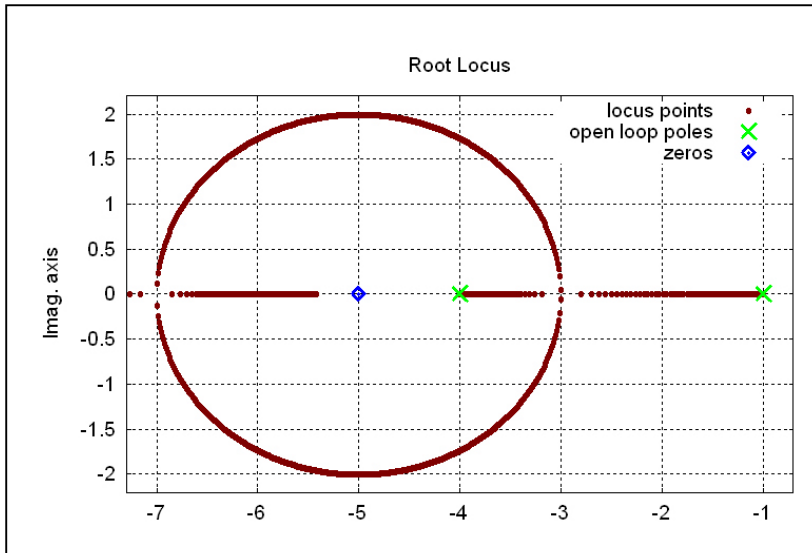
PI型コントローラの一例

$$G = \frac{k(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$
 の根軌跡

軌跡分離点のゲイン  $k$  は 0.59 である。

```
% rlocus_pi.m
% 根軌跡
W=tf2sys([1 2],[1 5 4 0]);

title('Root Locus')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
[r1,k]=rlocus(W,0.01,0,4);
k
rlocus(W,0.1,0,5)
```



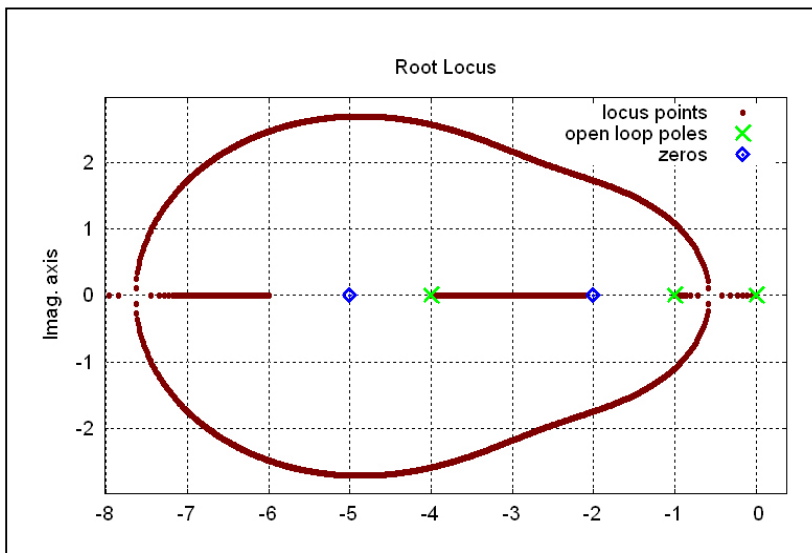
PD 型コントローラの一例

$$G = \frac{k(s+5)}{(s+1)(s+4)} \text{ の根軌跡}$$

軌跡分離点のゲイン  $k$  は 1.0, 9.0 である。

```
% rlocus_pd.m
% 根軌跡
W=tf2sys([1 5],[1 5 4]);

title('Root Locus')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
[r1,k]=rlocus(W,0.01,0,4);
k
rlocus(W,0.02,0,15)
```



PID 型コントローラの一例

$$G = \frac{k(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+4)} \text{ の根軌跡}$$

軌跡分離点のゲイン  $k$  は 0.13, 12.4 である。

```
% rlocus_pid.m
% 根軌跡
W=tf2sys([1 7 10],[1 5 4 0]);

title('Root Locus')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
[r1,k]=rlocus(W,0.01,0,4);
k
rlocus(W,0.02,0,12.4)
```