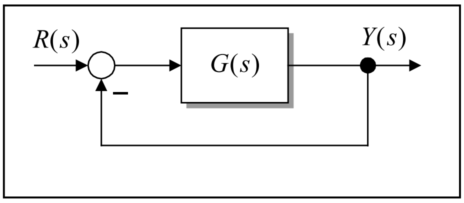
標準２次系の周波数特性諸量



減衰係数 ζ と位相余裕 θ_m の関係

開ループ伝達関数 $G(s)$ が

$$G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

となる直結フィードバック系は標準２次系となるので、$G(j\omega)$ よりゲイン交点 ω_b と位相余裕 θ_m を求める。

ゲイン交点 ω_b （交差周波数）は $|G(j\omega)|=1$ となる条件の周波数である。

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n{}^2}{-\omega^2 + j2\zeta\,\omega_n\omega} = \frac{1}{-u^2 + j2\zeta\,u} = \frac{-u^2 - j2\zeta\,u}{u^4 + (2\zeta\,u)^2} \qquad \text{ただし、} u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

また、$G(j\omega)$ の実数部：$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = \dfrac{-u^2}{u^4+(2\zeta\,u)^2}$、$G(j\omega)$ の虚数部：$I_m[G(j\omega)] = \dfrac{-2\zeta\,u}{u^4+(2\zeta\,u)^2}$ である。

ゲイン交点条件　$|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{u^4+(2\zeta\,u)^2}} = 1$ より　$u^4 + 4\zeta^2u^2 - 1 = 0$ が得られる。$u^2 = X$ と置き２次式を解くと、$X = -2\zeta^2 \pm \sqrt{4\zeta^4+1}$ を得る。更に、$X>0$ であることから $X = \sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2$ である。また、$u>0$ より　$u = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}$ であり、最終的にゲイン交点 ω_b は $\omega_b = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}$ となる。

次に、位相余裕 θ_m はベクトル軌跡の概形を参考に以下のように求められる。

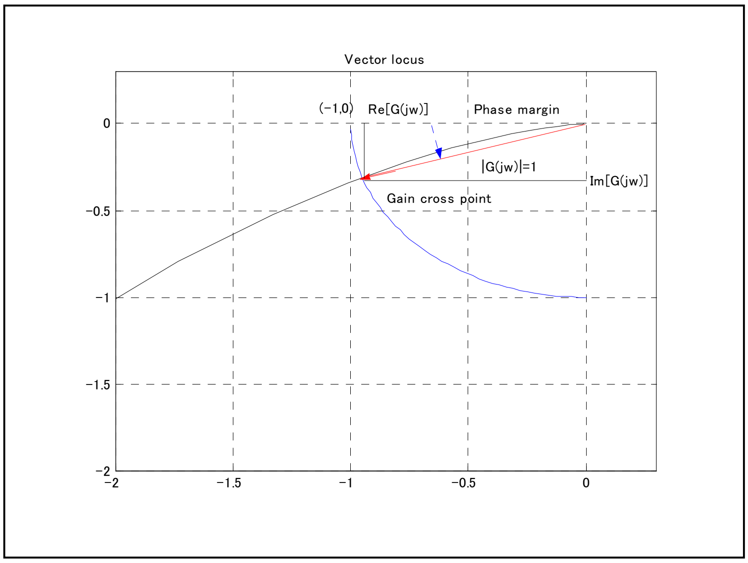
$$\theta_m = 90^o - \tan^{-1}\left.\frac{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}{I_m[G(j\omega)]}\right|_{\omega=\omega_b} = 90^o - \tan^{-1}\frac{u}{2\zeta} = 90^o - \tan^{-1}\frac{1}{2\zeta}\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}$$

ゲイン交点 ω_b

$$\boxed{\omega_b = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}}$$

位相余裕 θ_m

$$\boxed{\theta_m = 90^o - \tan^{-1}\frac{1}{2\zeta}\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}}$$



ピークゲイン M_p：閉ループ系ゲイン特性の最大値（共振ピークの高さ）　$g_P = 20\log M_p\ [dB]$

一般に、M_p が大きいと減衰性は悪く、小さいと減衰性は良い。M_p 規範　$1.1(0.8dB) < M_p < 1.5(3.5dB)$

標準２次系　$$W(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\,s + \omega_n{}^2}$$

のピークゲイン M_p とピーク周波数 ω_p（共振周波数）を求める。周波数伝達関数

$$W(j\omega)=\frac{{\omega_n}^2}{-\omega^2+j2\zeta\,\omega_n\omega+{\omega_n}^2}=\frac{1}{1-u^2+j2\zeta u}=\frac{1-u^2-j2\zeta u}{(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2}\qquad \text{ただし、} u=\frac{\omega}{\omega_n}$$

からゲイン M と位相 ϕ が以下のように得られる。

ゲイン：$M=|W(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2}}$　　位相：$\phi=\angle W(j\omega)=\tan^{-1}\dfrac{I_m[W(j\omega)]}{\mathrm{Re}[W(j\omega)]}=-\tan^{-1}\dfrac{2\zeta u}{1-u^2}$

ピークゲイン M_p はゲイン M の極値条件

$$\frac{d|W(j\omega)|}{d\omega}=\frac{dM}{du}=0\quad \text{つまり}\quad \frac{dM}{du}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{8\zeta^2u-4u(1-u^2)}{[(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2]^{3/2}}=0\quad \text{より}$$

$u=\sqrt{1-2\zeta^2}$ が得られるので、最初に **ピーク周波数** $\boxed{\omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}$ が求められる。

更に、$u=\sqrt{1-2\zeta^2}$ をゲイン M に代入すると、**ピークゲイン** M_p が以下のように得られる。

$$M_p=|W(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\{1-(\sqrt{1-2\zeta^2})^2\}^2+(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2})^2}}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

次に、ゲイン特性が 3 [dB]（振幅が $1/\sqrt{2}$ 倍）減少するカットオフ周波数 ω_{off}（帯域幅）を求める。

標準２次系のゲイン式より次式が成立する。

$$20\log|W(j\omega)|=-10\log\{(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2\}=-3\cong 20\log\frac{1}{\sqrt{2}}=-10\log 2$$

したがって、$(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2=2$ より、$u^2=X$ と置き 2 次方程式 $X^2+2(2\zeta^2-1)X-1=0$ を解くと

$X=1-2\zeta^2\pm\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}$ を得る。 更に、$X>0$ であることから $X=1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}$ である。

また、$u>0$ より $u=\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}$ であり、最終的に $\boxed{\text{カットオフ周波数 } \omega_{off}}$ は次式

$\omega_{off}=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}$ となる。