

DYNAMICS

講義資料

電子情報学部
コンピュータ応用工学科
穴吹 雅敏
(2006 年度版)

シラバス

テーマ：電気系、機械系のモデル化の基礎

キーワード：微分方程式、力学、モデル化

授業主旨または授業概要

ロボットなど機械システムや各種の制御システムの解析や設計を行うためには、制御対象の特性を出来るだけ正確に把握することが必要である。そのためには制御対象の数学的なモデル化の手法を会得しておくことが要請される。本科目では、力学系のモデリング技法を主体に、微分方程式で表されるシステムの表現法と解析法について解説する。具体的に、機械システムの各種要素の物理諸量の計算法と各要素を支配する方程式の立て方、そして機械要素が伝達要素やリンク機構で結合された場合の機械システムの数学的な表現について検討する。単純な機械システムであれば、ニュートン力学さえあれば十分であるが、質点が多数の場合とか、多リンク機構の場合などになると、幾何学的な配置も複雑になり、機械システムを支配する数式モデルを導出することは簡単ではない。このような多質点系の運動方程式を系統的に導出するためには、エネルギーに注目した解析力学が便利である。よって、本科目では、解析力学の基本を学習し、特にラグランジュの運動方程式を利用して、多質点系ならびに多リンク系を表現する微分方程式の誘導の仕方を学習する。なお、物理量の異なる電氣的な系においても同等の関係が成立することを認識し、類似性や相似性などの概念も修得する。

授業スケジュール

1. 力学の基礎
2. ニュートンの運動方程式
3. 並進運動と回転運動
4. ニュートンオイラーの運動方程式
5. 慣性と慣性モーメント
6. 各種物体の慣性モーメントの計算法
7. 簡単な力学系のモデル化
8. 2次の微分方程式で表現される対象の解析
9. 多質点系のモデル化とラグランジュの運動方程式
10. ロボットマニピュレータ（2軸または3軸）のモデル化
11. マニピュレータの制御とシミュレーション（その1）
12. マニピュレータの制御とシミュレーション（その2）
13. 定期試験

成績評価の方法

定期試験の結果、レポートの提出状況、授業への取り組みなどで成績の評価を行う。成績評価は、定期試験を70 [%]、レポートおよび小テストを30 [%]として判断する

ダイナミックスでの具体的な授業目標

(主に下記の4つの項目の理解を目指します)

1. 電気系、機械系の基本法則を理解すること。

そして、基本法則を利用して、電気系・機械系のモデル化ができること。

【詳細】

オームの法則、キルキホッフの法則などを用いて電気回路の方程式を求めることができること。取扱う要素は、抵抗、キャパシタ、コイルと電源とし、様々な接続形態の回路に対しても方程式を立てられること。

機械系に対しては、ニュートンの運動法則をベースに簡単な機械系（力学系）の微分方程式（運動方程式）を求めることができること。

2. 簡単な系の方程式（微分方程式）が解けること。

【詳細】

線形の微分方程式（定係数）の解をラプラス変換を用いて求めることができるようになること。最低でも1階の微分方程式がラプラス変換を用いて解けることを理解する。1階の微分方程式が解けるならば、部分分数展開を利用することで2階以上の微分方程式の解も求められることを理解する。これらのことが出来るためには、ラプラス変換の基本的な性質や公式を導くことが出来るようにすることが必要である。

3. ラグランジュの運動方程式にてモデル化ができること。

【詳細】

いろいろな系の位置エネルギー：U、運動エネルギー：T、消費エネルギー：Rを個別に求めることができ、ラグランジュ関数： $L = T - U$ （ラグランジアン）を定義し、ラグランジュ運動方程式に各エネルギーを代入し、運動方程式を求められるようにする。

電気系も機械系もエネルギーという共通の概念から方程式が求められることを理解する。

4. 上記で求められた方程式のコンピュータシミュレーションができること。

【詳細】

微分方程式の数値解法の一つであるオイラー法により、数値解を求める方法を習得する。なお、言語として、フリーソフトウェアである「Octave」を使用する。

Octaveのホームページから、Downloadして、使用環境を整えておくことが必要である。大学の設備には、Octaveは導入されていないので、各個人に割り当てられている「Zドライブ：容量100MB？」にインストールして使用する。展開時、約25MB占有。

5. 種々の物理系間の関係について理解する。

【詳細】

電気系、機械系と区別することなく、各系間には共通の概念があることを発見してください。共通点が発見できると、勉強が楽になりますし、少し楽しくなるかもしれません。

電気系と機械系の基礎

要素

エネルギーを蓄積する要素がシステムに依存するとシステムを支配する数式は微分方程式となる。

どんな要素があるのか？

電気の場合

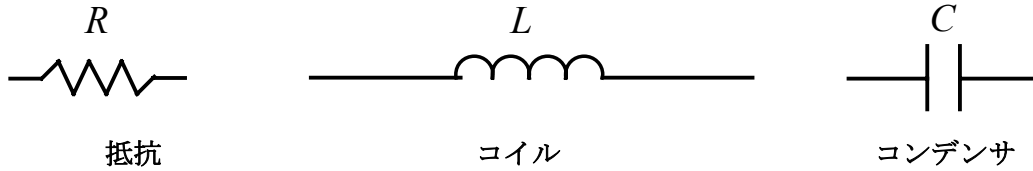


Fig. 1

力学の場合

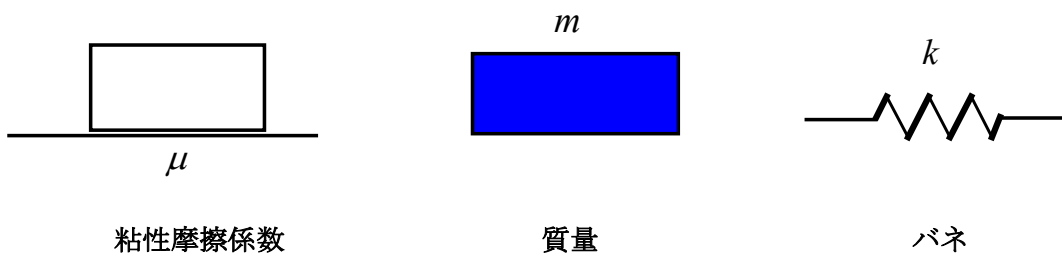


Fig. 2

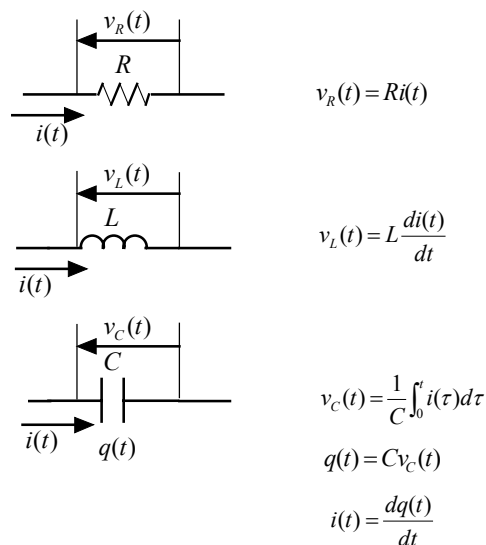
電気の抵抗と力学の粘性摩擦係数はエネルギーを消費し、電気のコイルとコンデンサと力学の質量とバネはエネルギーを蓄積できる。

まとめ

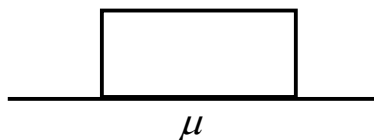
- ① 電気回路では、コイルL、コンデンサCなどが存在すると回路方程式は微分方程式となる。
- ② 力学系の場合は質量m、バネkが存在すると微分方程式で運動が表される。

要素の性質は理解できているか？

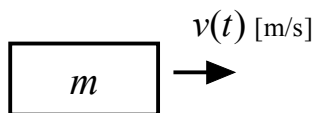
電気系の場合（電圧と電流の関係）



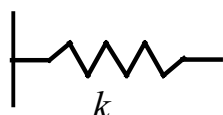
力学系の場合



$$f = \mu \frac{dx(t)}{dt} = \mu v(t)$$



$$f = ma = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



$$f = kx$$

エネルギー

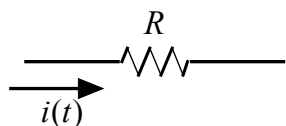
力学系 $\frac{1}{2}m \cdot v^2$ 運動エネルギー

座標: h にある質量の位置エネルギーは $m \cdot g \cdot h$

バネの位置エネルギーは、 $\frac{1}{2}k \cdot x^2$

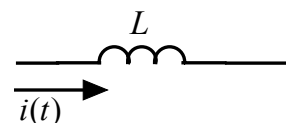
粘性摩擦のエネルギー消散関数は $\frac{1}{2}\mu \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot v^2$

電気系



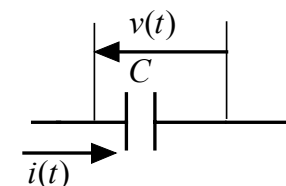
$$\frac{1}{2} Ri^2(t)$$

エネルギー消散関数に相当



$$\frac{1}{2} Li^2(t)$$

運動エネルギーに相当

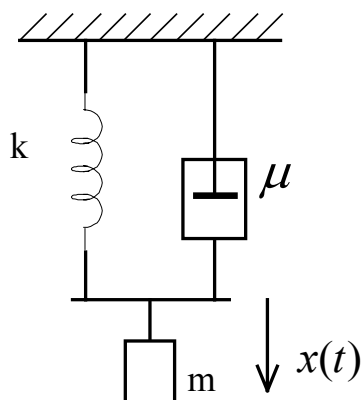


$$\frac{1}{2} Cv^2(t)$$

位置エネルギーに相当

(例)

(1) バネ・マス・ダンパー系



$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

$$R = \frac{1}{2} \mu \cdot \dot{x}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \cdot \dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -k \cdot x \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} &= \mu \cdot \dot{x} \end{aligned} \right\}$$

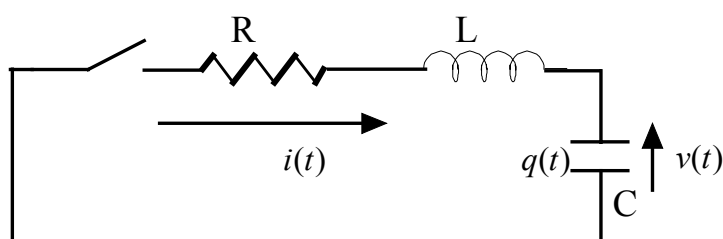
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + \mu \cdot \dot{x} = 0$$



$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

(2) 電気系 (R L C 直列回路)



$$T = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} L \cdot \dot{q}^2 \quad ; \text{運動エネルギーに相当}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} C \cdot \frac{1}{C^2} \cdot q^2 = \frac{1}{2C} \cdot q^2 \quad ; \text{位置エネルギーに相当}$$

$$R = \frac{1}{2} R \cdot i^2 = \frac{1}{2} R \cdot \dot{q}^2 \quad ; \text{エネルギー散逸関数}$$

$$\therefore L = T - U = \frac{1}{2}L \cdot \dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2 \quad (\text{ラグランジュ関数})$$

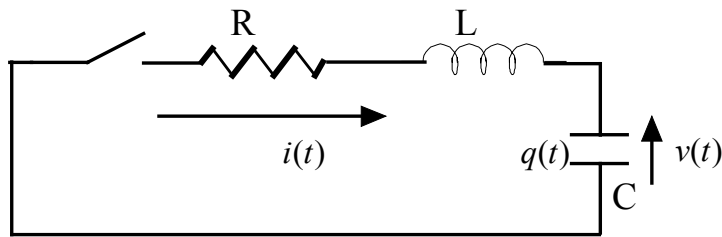
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L \cdot \dot{q} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{C}q \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = R \cdot \dot{q}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0 \dots \text{電源なしの回路 (外力なしに相当)}$$

$$L \cdot \ddot{q} + \frac{1}{C}q + R \cdot \dot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

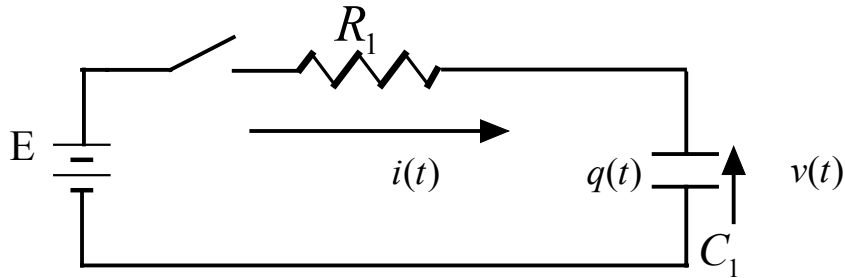
[回路理論による導出]



$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = 0 \text{ に } i = \frac{dq}{dt} \text{ を代入すると}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{キルヒホッフの電圧則})$$

(3) RC回路



$$R = \frac{1}{2}R_1 \cdot i^2 = \frac{1}{2}R_1 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

$$T = 0$$

$$U = \frac{1}{2}C_1 \cdot V^2 = \frac{1}{2}C_1 \left(\frac{q}{C_1} \right)^2 = \frac{1}{2C_1}q^2$$

$$L = T - U = -\frac{1}{2C_1}q^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{C_1}q \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = R_1 \cdot \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = F \quad \text{E は F に相当}$$

$$\frac{1}{C_1}q + R_1 \cdot \dot{q} = E$$

$$\dot{q} + \frac{1}{R_1 C_1}q = \frac{1}{R_1}E$$

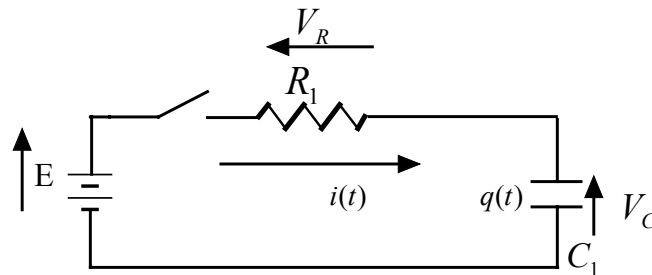
また、

$$q = C_1 V \quad : \quad V \text{ はコンデンサの両端の電圧}$$

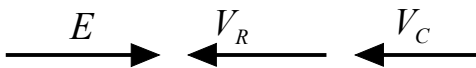
$$C_1 \dot{V} + \frac{1}{R_1 C_1} C_1 V = \frac{1}{R_1} E$$

$$\dot{V} + \frac{1}{R_1 C_1} V = \frac{1}{R_1 C_1} E$$

[回路理論による導出]



回路の電圧(電圧降下と起電力)を描くと



となる。

$$V_R + V_C - E = 0$$

$$V_R = Ri \quad , \quad V_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

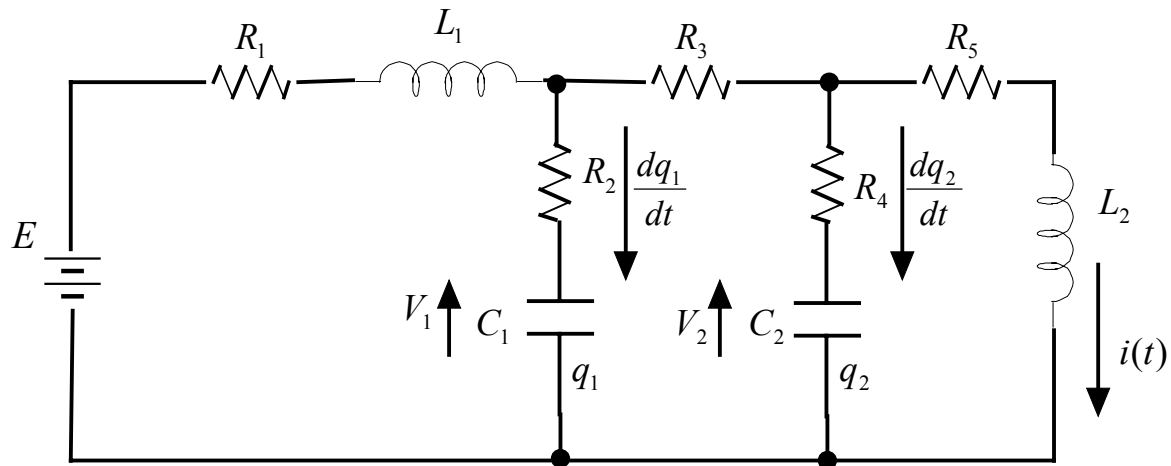
従って、

$$Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = E$$

または、 $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt}$ であるから

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = E$$

(4) やや複雑な電気回路



上の回路の運動エネルギー、位置エネルギー、エネルギー散逸関数を求めよ。

(解答例)

C_1 、 C_2 、 L_2 の電荷及び電流を q_1 、 q_2 、 i とする。

よって C_1 や R_2 に流れる電流は dq_1/dt 、 R_4 、 C_2 には dq_2/dt が流れる。

回路において、運動エネルギー相当の量はコイルにより生じることに注意すると、

$$T = \frac{1}{2}L_2i^2 + \frac{1}{2}L_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + i)^2$$

と求められる。

また、位置エネルギー相当の量はコンデンサに蓄えられる静電エネルギーに対するので

$$U = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \cdot V_2 = C_2V_2^2$ であるから

$$U = \frac{1}{2C_1}q_1^2 + \frac{1}{2C_2}q_2^2$$

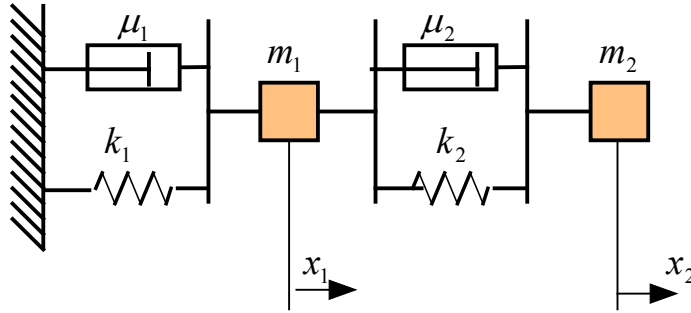
となる。

エネルギー散逸関数 R は

$$R = \frac{1}{2}R_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + i)^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_3(\dot{q}_2 + i)^2 + \frac{1}{2}R_4\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}R_5i^2$$

となる。

(5) 機械振動系 (2 慣性系)



上の力学系の運動エネルギー、位置エネルギー、エネルギー散逸関数を求めよ。更に、運動方程式を求めよ。

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$R = \frac{1}{2}\mu_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \quad (F_1 = 0 \text{ 外力無し})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = \mu_1\dot{x}_1 - \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\text{従って、} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) + \mu_1\dot{x}_1 - \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

整理すると

$$m_1\ddot{x}_1 + (\mu_1 + \mu_2)\dot{x}_1 - \mu_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \quad (5, 1)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = F_2 \quad (F_2 = 0 \text{ 外力無し})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1) \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\text{従って} m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

整理すると

$$m_2\ddot{x}_2 - \mu_2\dot{x}_1 + \mu_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \quad (5, 2)$$

式(5, 1)、(5, 2)を行列形式で表現すると

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 & -\mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

ラグランジュ運動方程式によるモデル化の例

システム内の運動エネルギー、位置エネルギー、エネルギー散逸関数がわかれば、それらをラグランジュの運動方程式に代入するとシステムを支配する微分方程式(運動方程式)を求めることができる。

ラグランジュの運動方程式

T ; 運動エネルギー、 U ; 位置エネルギー、 R ; エネルギー散逸関数

L ; ラグランジュ関数

$$L = T - U$$

このとき、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

q_i ; 一般化座標

\dot{q}_i ; 一般化速度

F_i ; 外力

が成立する。

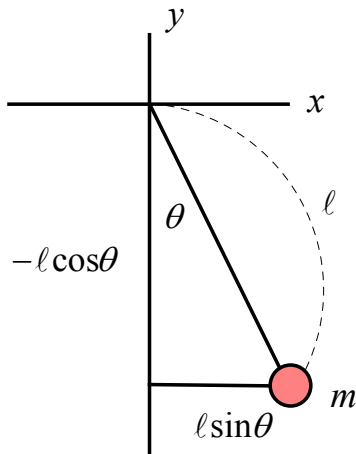
T は、 \dot{q}_i の関数

U は、 q_i の関数

R は、 \dot{q}_i の関数

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \text{ と表わす。}$$

(例 1)



単振子の運動方程式を求めよ。但し $R=0$ とする。

質量 m の座標 (x, y) を θ で表わすと

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = -l \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

である。

ところで、質量 m の運動エネルギーは速度を v とすると次式が成り立つ

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

v は v_x と v_y 成分の合成である。

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = l^2 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

よって、

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

と表わすことができる。

また、Fig-1 より位置エネルギー U は

$$U = -mgl \cos \theta \quad (6)$$

であるから

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (7)$$

となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (8)$$

式(8)を、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = F \quad (9)$$

に代入する。例 1 では $R = 0, F = 0$ である。

よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) - (-mgl \sin \theta) &= 0 \\ ml^2 \frac{d}{dt} \dot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0 \\ l\ddot{\theta} + g \sin \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

単振子の運動方程式で $R = 0$ の場合は質量 m には依存しない運動であることが分かる。

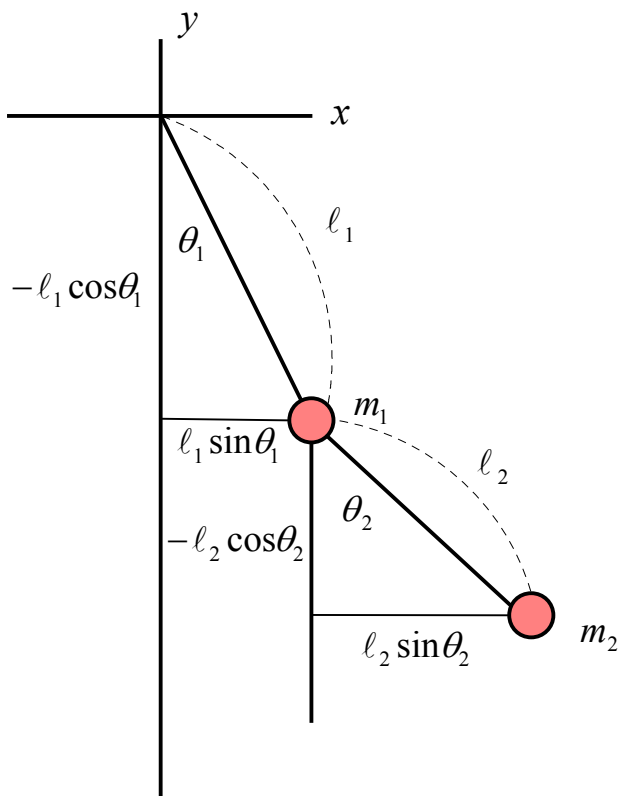
(例 1-1) $R \neq 0$ の場合はどうなるか

$$R = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2 \text{ と仮定する。}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu\dot{\theta} \text{ となるので}$$

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + \mu\dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{\mu}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

(例 2)



m_1 の座標 (x_1, y_1)

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (12)$$

m_2 の座標 (x_2, y_2)

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (13)$$

式(12)、(13)の時間での微分

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (15)$$

よって m_1 の運動エネルギー T_1 は、

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

また m_2 の運動エネルギー T_2 は、

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

(参考)

$$\textcircled{1} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\textcircled{2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = e^{j\theta_1} \cdot e^{-j\theta_2} = (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2) \\ = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)$$

① と②より

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

式(16)と式(17)よりシステム的全運動エネルギー T は

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (18)$$

となる。

また、システム的全位置エネルギー U は

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (19)$$

となる。

よってラグランジュ関数 $L = T - U$ は次式のようになる。

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (20)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = F_1 & (A) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = F_2 & (B) \end{cases} \quad (21)$$

式(21)を求めるのであるが、 $F_1 = 0, F_2 = 0$ (外力なし)でかつ $R = 0$ (摩擦なし)とする。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 & F_1 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 & F_2 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式(22)を式(21) (A)に代入すると

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \frac{d}{dt} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) \} \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (24)$$

式(24)を整理すると

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (25)$$

となる。

また、式(23)を式(22)(B)に代入すると

$$\begin{aligned} m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる。

すなわち、Fig-2 の二重振子は式(25)と式(26)の連立微分方程式で表現されることがわかる。

<まとめ>

- ① システム(系)の全運動エネルギーを求める。
- ② システムの全位置エネルギーを求める。
- ③ システムの全散逸関数を求める。
- ④ $\frac{\partial L}{\partial q_i}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ などを求める。
- ⑤ ④の結果をラグランジュ運動方程式に代入する。

線形微分方程式の解を求めるために（ラプラス変換の応用）

エネルギー蓄積要素が存在するシステムの数式モデルは、微分方程式となることがわかった。この資料では、微分方程式の解を求める方法について述べる。

微分方程式の種類

偏微分方程式：独立変数が複数の場合

常微分方程式：独立変数が唯一の場合

時間 t の場合（現象）

常微分方程式のみを取り扱う

その他の条件

- ① 微分方程式の係数は一定
- ② 線形である。（重ねの理が成立）

すなわち本科目では線形定係数常微分方程式に限定する。

（注）ロボットなど力学系のほとんどは複雑な非線形方程式となることが多い。しかし、非線形の微分方程式の解析的に解を求める一般論はない。

線形で定係数常微分方程式の解を求めるためにラプラス変換を用いる。

ラプラス変換

定義式

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

s ; 複素数

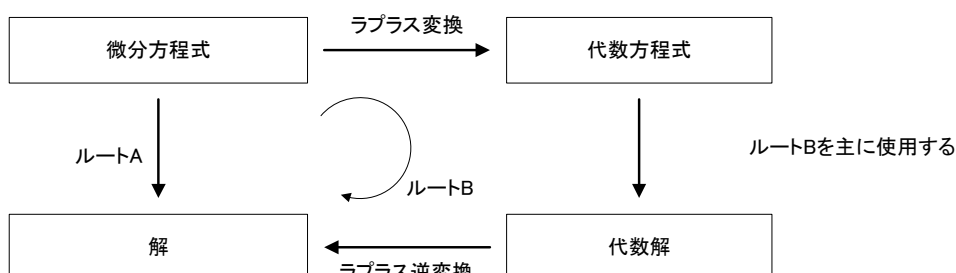
（参考） 逆変換 $(F(s) \longrightarrow f(t))$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2)$$

注；複素関数論の知識が必要なので本科目では用いない。

（考え方）手順

- ① 微分方程式をラプラス変換する。
- ② ①より代数方程式が得られる。→ 代数解を求める。
- ③ s の領域の代数解を時間 t の関数に戻す。



微分方程式を自由にラプラス変換するために

(1) 導関数 $\frac{dy}{dt}$ のラプラス変換

定義式より

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \quad (3)$$

となる。

上の積分を実行するために部分積分法が必要となる。

(参考)部分積分法は、積の微分公式よりもとめられる。

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\therefore \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \quad (\text{部分積分の公式})$$

(4)

式(3)で

$$u' = \frac{dy}{dt}, \quad v = e^{-st} \quad (5)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt &= [y(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(t) \cdot (-se^{-st}) dt \\ &= s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt + [y(t)e^{-st}]_0^{\infty} \\ &= sY(s) + [y(\infty)e^{-s\infty} - y(0)e^{-s \cdot 0}] \\ &= sY(s) - y(0) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

(2) 2階の導関数のラプラス変換

$\frac{d^2y}{dt^2}$ のラプラス変換を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2y}{dt^2} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz}{dt} e^{-st} dt = sZ(s) - z(0)$$

$$z(t) = \frac{dy}{dt}, \quad z(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = y'(0)$$

$$Z(s) = \int_0^{\infty} z(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{d^2y}{dt^2} e^{-st} dt = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \quad (7)$$

1階の導関数のラプラス変換が求められれば、2階、3階も求められる。

(3) 3階の導関数のラプラス変換

$$\int_0^{\infty} \frac{d^3 y}{dt^3} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz_1}{dt} e^{-st} dt = sZ_1(s) - z_1(0)$$

$$Z_1(s) = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad , \quad z_1(0) = \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = y''(0)$$

$$Z_1(s) = \int_0^{\infty} \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz_2}{dt} e^{-st} dt = sZ_2(s) - z_2(0)$$

$$z_2(t) = \frac{dy}{dt} \quad , \quad z_2(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = y'(0)$$

$$Z_2(s) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\infty} \frac{d^3 y}{dt^3} e^{-st} dt &= s\{s[sY(s) - y(0)] - y'(0)\} - y''(0) \\ &= s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) \end{aligned} \tag{8}$$

まとめ

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

時間関数	ラプラス変換形
$\frac{dy}{dt}$	$sY(s) - y(0)$
$\frac{d^2 y}{dt^2}$	$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\frac{d^3 y}{dt^3}$	$s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$

(4) 初等関数のラプラス変換

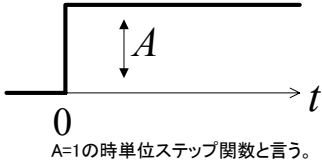
(4.1) 指数関数

$$f(t) = e^{-at}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\infty} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)0} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \tag{9}$$

(4.2) ステップ関数



$$\int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = A \left[-\frac{1}{s} e^{-s\infty} + \frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right] = \frac{1}{s} A$$

(4.3) 正弦波・余弦波 ($\sin \omega t$, $\cos \omega t$)

オイラーの公式 ; $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L\{e^{j\omega t}\} = L\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} = L\{\cos \omega t\} + jL\{\sin \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore L\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad , \quad L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

(4.4) ランプ関数 ; at

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} at e^{-st} dt &= a \left[t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - a \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} \infty e^{-s\infty} + 0 \frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] a \\ &= a \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{a}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{a}{s^2} \end{aligned}$$

<まとめ>

時間関数	ラプラス変換形
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
1	$\frac{1}{s}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
at	$\frac{a}{s^2}$

(5) ラプラス変換の諸定理・公式

(5.1) 推移定理(推移則)

$$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a) \quad , \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

(確認)

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

(例) $e^{-at} \sin \omega t$ のラプラス変換は?

$$L\{e^{-at} \sin \omega t\} = F(s+a) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=s+a} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

(5.2) 微分則

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(確認)

$$\int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ -\frac{d}{ds} e^{-st} \right\} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(例) te^{-at} のラプラス変換は?

$$L\{te^{-at}\} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = -\frac{1}{(s+a)^2} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\ast L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) \text{ を利用}$$

この問題は推移則も通用できる。

$$L\{e^{-at} t\} = H(s+a) = \frac{1}{s^2} \Big|_{s=s+a} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$H(s) = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

(5.3) 初期値定理

$f(t)$ の $f(0)$ を求めることを $F(s)$ を用いて行なう。

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

(確認)

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{ds} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

微分則

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0)) = 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

(5.4) 最終値定理

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

(確認)

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) dt = f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0)\} = f(\infty) - f(0) \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

まとめ

時間関数	ラプラス変換形
推移則 $e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
微分則 $tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
初期値 $f(0)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
最終値 $f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

(6) 微分方程式をラプラス変換を用いて解く方法

(6.1) 一階の線形定係数微分方程式の例

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + ay = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ。

与式をラプラス変換すると、

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = 0$$

$$\therefore Y(s) = \frac{1}{s+a} y(0)$$

上式をラプラス変換する。

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \text{ であることから、 } L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

$$\therefore y(t) = y(0)e^{-at} = e^{-at}$$

(注) L^{-1} は逆変換することを表す。

前述したように $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st} ds$ を用いてラプラス逆変換するには、複素関数論の知識が必要になる。

(6.2) 一階の微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + ay = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (t \geq 0)$$

の解を求めよ。

ラプラス変換すると次式を得る。

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}y(0) + \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{s+a}y(0) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

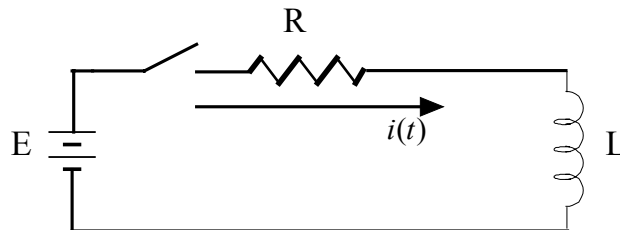
よって、上式を時間関数に戻すと

$$y(t) = y(0)e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

となる。 $y(0) = 1$ であるから、

$$y(t) = e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

(6.3) RL 直列回路に E [V] の電池をつないだときの回路に流れる電流を求めよ。



回路方程式

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E$$

$$i(0) = 0$$

ラプラス変換すると

$$RI(s) + L\{sI(s) - i(0)\} = \frac{E}{s}$$

となる。

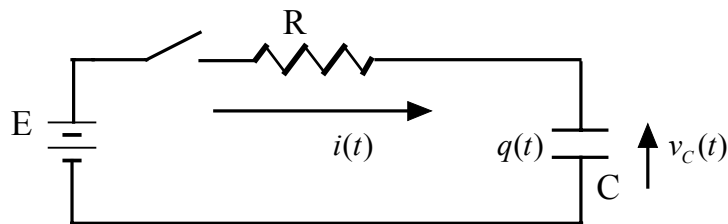
$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{Li(0)}{Ls+R} + \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}} + \frac{\frac{E}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} \\
 &= \frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}} + \frac{\frac{E}{L}}{s} - \frac{\frac{E}{L}}{s+\frac{R}{L}} \\
 \therefore i(t) &= i(0)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})
 \end{aligned}$$

ただし、 $i(0) = 0$ であるから、

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

と求められる。

(6.4) RC 直列回路に E [V] の電池を接続したときのコンデンサの両端の電圧を求めよ。但し、初期電荷は無いものとする。



$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int idt = E$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$v_c(t)$ の微分方程式は、 $RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = E$ となる。

ラプラス変換すると、

$$RC\{sV_c(s) - v_c(0)\} + V_c(s) = \frac{E}{s}$$

$$\begin{aligned}
 V_c(s) &= \frac{RCv_c(0)}{RCs+1} + \frac{E}{s(RCs+1)} = \frac{v_c(0)}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{\frac{E}{RC}}{s(s+\frac{1}{RC})} \\
 &= \frac{v_c(0)}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{RC}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore v_c(t) = v_c(0)e^{-\frac{1}{RC}t} + E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$v_c(t) = \frac{1}{C}q(t)$ 、 $q(0) = 0$ 初期電荷は 0 であるから、

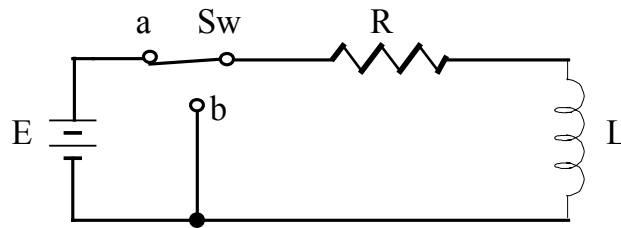
$$v_c(0) = \frac{1}{C}q(0) = 0$$

である。よって、

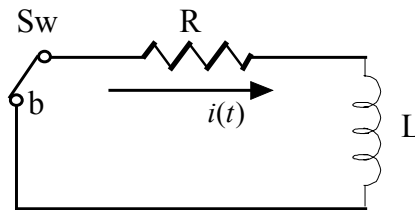
$$v_c(t) = E(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$$

と求められる。

(6.5) 図に示す電気回路においてスイッチ Sw を $t=0$ で b 側に切り換えた。 R に流れる電流を求めよ。



$t=0$ でスイッチが b 側に切り替わると下図の回路になる。



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

ラプラス変換すると

$$RI(s) + L\{sI(s) - i(0)\} = 0, \quad I(s) = \frac{Li(0)}{Ls + R}$$

と求められる。

$i(0) = \frac{E}{R}$ であるから、(よく考えてね！)

$$I(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{R}{L}}, \quad \therefore i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

※スイッチが a 側の時の電流の最終値が b 側に切替った時の初期値となる(理想的な場合)

(6.6) 部分分数展開について

ラプラス変換を用いて微分方程式を解く際、部分分数展開が必要となる。そこでこの部分分数展開について解説する。(既に例題の中で用いてきたが)

たとえば、(6.3)のRL回路の場合

$$\frac{\frac{E}{L}}{s(s + \frac{R}{L})}$$

なる項が現れた。

$$\frac{\frac{E}{L}}{s(s + \frac{R}{L})} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{R}{L}}$$

のように表現することを部分分数展開と呼んでいる。 k_1, k_2 を求める必要があるが、最も基本的な方法は、

$$\frac{\frac{E}{L}}{s(s + \frac{R}{L})} = \frac{k_1(s + \frac{R}{L}) + k_2s}{s(s + \frac{R}{L})}$$

が成立するように k_1, k_2 を決めれば良い。
すなわち、

$$\frac{E}{L} = (k_1 + k_2)s + k_1 \frac{R}{L}$$

が成立するには、

$$\begin{cases} \frac{R}{L}k_1 = \frac{E}{L} \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

を満足すればよいことがわかる。
よって、

$$\begin{cases} k_1 = \frac{E}{R} \\ k_2 = -\frac{E}{R} \end{cases}$$

と求められる。

(6.7)2 階の常微分方程式

$$(6.7.1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad , y(0) = 1, y'(0) = 1 \text{ の解を求めよ。}$$

ラプラス変換すると、

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = 0$$

となる。

従って、 $Y(s)$ は次式であらわされる。

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0) + 3y(0)}{s^2 + 3s + 2}$$

となる。

$y(0)=1, y'(0)=1$ を代入すると、

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

となる。

分母に注目して、

$$s^2+3s+2=(s+1)(s+2)=0 \quad (\text{補助方程式とか特性方程式と呼ぶ})$$
$$s=-1, -2 \quad (\text{特性項})$$

$$Y_{(s)} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

分子

$$s+4 = k_1(s+2) + k_2(s+1)$$

$$\begin{cases} 2k_1+k_2=4 \\ k_1+k_2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1=3 \\ k_2=-2 \end{cases}$$

$$\therefore y(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right\} = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(6.7.2) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0$, $y(0)=1, y'(0)=0$ を解け。

ラプラス変換すると次式を得る。

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0) + y(0)}{s^2 + s + 2}$$

$y(0)=1, y'(0)=0$ を代入すると

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}$$

となる。

強引であるが今までの方法で行うには

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2} = \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{7}}{2})(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2})}$$
$$= \frac{k_1}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{7}}{2}} + \frac{k_2}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2}}$$
$$k_1 = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2}}{j\sqrt{7}} \quad , \quad k_2 = \frac{\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{7}}{2}}{-j\sqrt{7}}$$

よって、

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1+j\sqrt{7}}{2} \frac{1}{j\sqrt{7}} e^{(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2})t} - \frac{1-j\sqrt{7}}{2} \frac{1}{j\sqrt{7}} e^{(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{7}}{2})t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \left\{ \left(\frac{1}{2j} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) e^{j\frac{\sqrt{7}}{2}t} - \left(\frac{1}{2j} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) e^{-j\frac{\sqrt{7}}{2}t} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \left\{ \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{\sqrt{7}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{7}}{2}t} \right) + \frac{\sqrt{7}}{2} \left(e^{j\frac{\sqrt{7}}{2}t} + e^{-j\frac{\sqrt{7}}{2}t} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \left\{ \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t + \sqrt{7} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{7})^2} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \theta \right) \\
&= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \theta \right) = \sqrt{\frac{8}{7}} e^{\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \theta \right) \\
\theta &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{7}}{1} \right) = \tan^{-1}(\sqrt{7})
\end{aligned}$$

(6.7.3) 前問を簡単に行うために、

$$\left. \begin{aligned}
L^{-1}\{e^{-at} \sin \omega t\} &= \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \\
L\{e^{-at} \cos \omega t\} &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}
\end{aligned} \right\} \text{の利用 (推移則より導出できる)}$$

前問の $Y(s)$ は、

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4}} = \frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{s+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \\
\therefore &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} e^{\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \theta \right) \\
&= \sqrt{\frac{8}{7}} e^{\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \theta \right)
\end{aligned}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} \right) = \tan^{-1}(\sqrt{7})$$

(参考) 単振動の合成

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

(注) (6.7.3)の方法が使用できる条件

特性方程式(2次の)の解が共役複素数のとき

(このとき、システムは振動的と称する。)

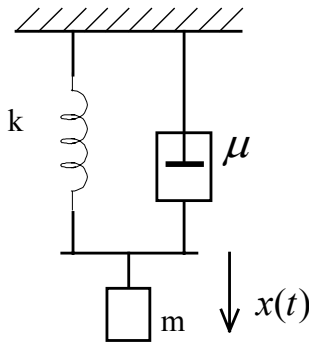


Fig. 6.8.1

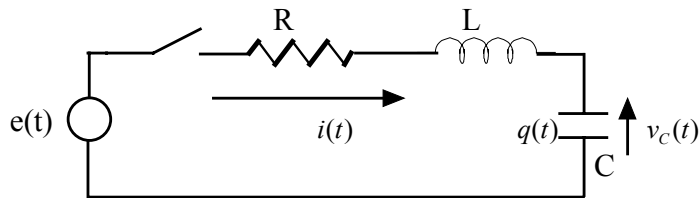


Fig. 6.8.2

Fig-6.8.1 に対して次式が成立

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = f$$

(6.8.1)

Fig-6.8.2 に対して次式が成立

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = e$$

(6.8.2)

変数の意味や係数は異なるが形式は同じ。

そこで次の微分方程式を考える。(二次の標準形)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k_1 \omega_n^2 z(t) \quad (6.8.3)$$

ω_n ; 固有角周波数

ζ ; 減衰係数

式(6.8.1)を変形すると次式を得る。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} f \quad (6.8.4)$$

式(6.8.4)と式(6.8.3)を対応させると

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

式(6.8.2)を変形すると

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{LC} e \quad (6.8.5)$$

式(6.8.5)と(6.8.3)より

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$$

$2\zeta\omega_n = \frac{\mu}{m}$ $k_1\omega_n^2 = \frac{1}{m}$ <p>となる。</p> $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\zeta = \frac{\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{km}}$ $k_1 = \frac{1}{k}$		$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}$ $k_1\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$ <p>となる。</p> $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ $k_1 = 1$
--	--	---

(6.8.1) $\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + y = 0$ に対して、固有振動数(固有角周波数)と減衰係数を求めよ。

$$\omega_n^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \omega_n = 1$$

$$2\zeta\omega_n = 0.2 \quad \longrightarrow \quad \zeta = \frac{0.2}{2\omega_n} = 0.1$$

(6.8.2) (6.8.1)の解を求めよ。但し、 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ とする。

ラプラス変換すると、

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 0.2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0) + 0.2y(0)}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$ を代入すると

$$Y(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + 0.2s + 1}$$

となる。

$$Y(s) = \frac{s + 0.1 + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 1 - 0.1^2} = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + (\sqrt{1 - 0.1^2})^2} + \frac{0.1}{\sqrt{1 - 0.1^2}} \frac{\sqrt{1 - 0.1^2}}{(s + 0.1)^2 + \sqrt{(1 - 0.1^2)^2}}$$

$$y(t) = e^{-0.1t} \cos\sqrt{0.99}t + \frac{0.1}{\sqrt{0.99}} e^{-0.1t} \sin\sqrt{0.99}t$$

$$\therefore = e^{-0.1t} \sqrt{\left(\frac{0.1}{\sqrt{0.99}}\right)^2 + 1} \cdot \sin\{\sqrt{0.99}t + \theta\}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{\frac{0.1}{\sqrt{0.99}}} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{0.99}}{0.1} \right)$$

定係数線形微分方程式の解法 (1)

定係数線形微分方程式とは、微分方程式の係数が定数で線形性が成立つ方程式であり、線形要素からなる電気回路や線形要素のみからなる力学系を数式として表現するとこの種の微分方程式となる。

いろいろなシステムの特性を知るためには微分方程式として表現し、その解を求めることが重要である。そこで、本小冊子では、解の求め方について説明する。

解き方<その1>

過渡解と定常解という考え方による定係数線形微分方程式の解き方について述べる。

Step1

同次方程式の一般解を求める。

Step2

定常解を求める。解を仮定する。

Step3

Step1 と step2 の解を加算し、その解に含まれる未定の係数を決定すると微分方程式の解となる。未定の係数を定めるには、初期条件が必要である。

例題1

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = f(t) \quad (1)$$

を解け。ただし、 $y(0) = y_0$ とし、 $f(t) = A \sin \omega t$ とする。

Step1 同次方程式の一般解を求める

$f(t) = 0$ とした微分方程式を同次方程式とよぶ。そのときの解を $y_g(t)$ とする。

$$\frac{dy_g(t)}{dt} + ay_g(t) = 0 \quad (2)$$

式(2)の補助方程式(特性方程式)を求めると

$$s + a = 0 \quad (3)$$

となる。

式(3)の解(特性根)を用いて、 $y_g(t)$ を次式と仮定する。

$$y_g(t) = ke^{st} = ke^{-at} \quad (4)$$

式(4)を式(2)に代入すると、

$$-kae^{-at} + ake^{-at} = 0 \quad (5)$$

となるから、式(4)は、式(2)の解であることが分かる。

Step2 定常解

定常解を $y_s(t)$ とし、下記の方程式を満足するものとする。

$$\frac{dy_s(t)}{dt} + ay_s(t) = A \sin \omega t \quad (6)$$

ここで、

$$y_s(t) = B \sin(\omega t + \theta) \quad (7)$$

と仮定する。

式(7)を式(6)に代入すると、次式を得る。

$$B\omega \cos(\omega t + \theta) + aB \sin(\omega t + \theta) = A \sin \omega t \quad (8)$$

式(8)を整理すると次のようになる。

$$B\sqrt{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t + \theta + \varphi) = A \sin \omega t \quad (9)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(10)

したがって、式(9)が成立するための条件として次式を得る。

$$B\sqrt{a^2 + \omega^2} = A, \quad \theta + \varphi = 0 \quad (11)$$

式(11)を式(7)に代入すると

$$y_s(t) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (12)$$

となる。

Step3

$$y_g(t) = ke^{st} = ke^{-at}, \quad y_s(t) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \text{ より、}$$

$$y(t) = ke^{-at} + \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (13)$$

初期条件： $t=0, y(0) = y_0$ を式(13)に代入し、 k を定める。

$$y_0 = ke^0 + \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(-\varphi) \text{ であるから、}$$

$$k = y_0 + \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\varphi) = y_0 + \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = y_0 + \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (14)$$

よって、初期条件を満足する解（特殊解）は次式となる。

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \right) e^{-at} + \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (15)$$

例題 1 の数学メモ

メモ 1 : 単振動の合成の公式

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(x + \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

メモ 2 : $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ から、 $\sin \varphi$ と $\cos \varphi$ の値。

$$\tan \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

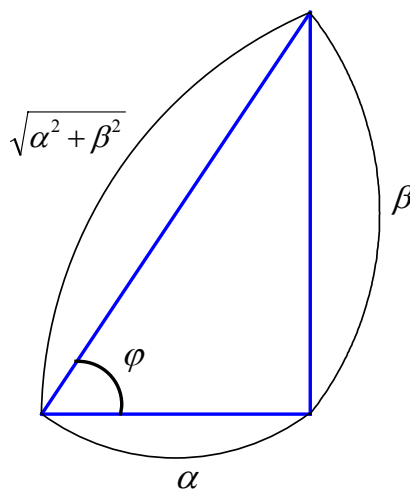


Fig. 1

メモ 3 : 奇関数と偶関数 : $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$

奇関数 : 原点に対称 → sin 関数

偶関数 : y 軸に対称 → cos 関数

例題 2

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (a+b)\frac{dy(t)}{dt} + aby(t) = f(t) \quad (16)$$

を解け。ただし、 $y(0) = y_0$ 、 $y'(0) = y'_0$ とし、 $f(t) = A \sin \omega t$ とする。

Step1 同次方程式の一般解を求める

$f(t) = 0$ とした微分方程式を同次方程式とよぶ。そのときの解を $y_g(t)$ とする。

$$\frac{d^2 y_g(t)}{dt^2} + (a+b)\frac{dy_g(t)}{dt} + aby_g(t) = 0 \quad (17)$$

式(17)の補助方程式（特性方程式）を求めると

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \quad , \quad (s+a)(s+b) = 0 \quad (18)$$

となる。

式(18)の解（特性根）を用いて、 $y_g(t)$ を次式と仮定する。

$$y_g(t) = k_1 e^{-at} + k_2 e^{-bt} \quad (19)$$

式(19)が解であることは、解を式(17)に代入することで確かめられる。

Step2 定常解

定常解を $y_s(t)$ とし、下記の方程式を満足するものとする。

$$\frac{d^2 y_s(t)}{dt^2} + (a+b)\frac{dy_s(t)}{dt} + aby_s(t) = A \sin \omega t \quad (20)$$

ここで、

$$y_s(t) = B \sin(\omega t + \theta) \quad (21)$$

と仮定する。

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = B\omega \cos(\omega t + \theta) \quad (22)$$

$$\frac{d^2 y_s(t)}{dt^2} = -B\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \quad (23)$$

式(21)から(23)を式(20)に代入すると、次式を得る。

$$-B\omega^2 \sin(\omega t + \theta) + (a+b)B\omega \cos(\omega t + \theta) + abB \sin(\omega t + \theta) = A \sin \omega t \quad (24)$$

式(24)を整理すると次のようになる。

$$B\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} \sin(\omega t + \theta + \varphi) = A \sin \omega t \quad (25)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{(a+b)\omega}{ab - \omega^2} \right) \quad (26)$$

したがって、式(25)が成立するための条件として次式を得る。

$$B\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} = A, \quad \theta + \varphi = 0 \quad (27)$$

式(27)を式(21)に代入すると

$$y_s(t) = \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (28)$$

となる。

Step3

$$y_g(t) = k_1 e^{-at} + k_2 e^{-bt}, \quad y_s(t) = \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \text{ より、}$$

$$y(t) = k_1 e^{-at} + k_2 e^{-bt} + \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (29)$$

初期条件： $y(0) = y_0$ 、 $y'(0) = y'_0$ を次式に代入し、 k_1, k_2 を定める。

$$y'(t) = -ak_1 e^{-at} - bk_2 e^{-bt} + \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (30)$$

式(30)は、式(29)の時間微分である。

式(29)、(30)に初期条件を代入すると、

$$y_0 = k_1 + k_2 + \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \sin(-\varphi)$$

(31)

$$y'_0 = -ak_1 - bk_2 + \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \cos(-\varphi) \quad (32)$$

式(31)(32)を連立方程式として、 k_1, k_2 を求める。

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \sin(-\varphi) &= -\frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \frac{(a + b)\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \\ &= -\frac{(a + b)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \cos(-\varphi) &= \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \frac{ab - \omega^2}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2}} \\ &= \frac{(ab - \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (34)$$

$$k_1 + k_2 = y_0 + \frac{(a + b)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2} \quad (35)$$

$$ak_1 + bk_2 = -y'_0 + \frac{(ab - \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a + b)^2 \omega^2} \quad (36)$$

上式より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{(a+b)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \\ -y_0' + \frac{(ab-\omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{y_0' - \frac{(ab-\omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} + b \left[y_0 + \frac{(a+b)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right]}{b-a} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[y_0' + by_0 + \frac{-(ab-\omega^2)A\omega + b(a+b)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[y_0' + by_0 + \frac{(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{-y_0' + \frac{(ab-\omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} - a \left[y_0 + \frac{(a+b)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right]}{b-a} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[-(y_0' + ay_0) - \frac{(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

かなり面倒な計算でした。

したがって、解は整理すると

$$y(t) = k_1 e^{-at} + k_2 e^{-bt} + \frac{A}{\sqrt{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (40)$$

ただし、

$$k_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \left[y_0' + by_0 + \frac{(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right] \quad (41)$$

$$k_2 = \frac{1}{b-a} \cdot \left[-(y_0' + ay_0) - \frac{(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \right] \quad (42)$$

となる。

もし、初期条件がすべて0であるとすると、

$$k_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \quad (43)$$

$$k_2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab-\omega^2)^2 + (a+b)^2\omega^2} \quad (44)$$

となる。

初期条件がすべて0の場合の微分方程式の解は下記のようになる。

$$y(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} e^{-at} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} e^{-bt} + \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (45)$$

式(45)が初期条件を満足していることを確認する。

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} \\ &\quad + \frac{A}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2}} \sin(-\varphi) \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b^2 + \omega^2 - a^2 - \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} - \frac{(a+b)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} - \frac{(a+b)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

また、

$$y'(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-a(b^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} e^{-at} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-b(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} e^{-bt} + \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (47)$$

であるから、

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-a(b^2 + \omega^2)A\omega + b(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} + \frac{A\omega}{\sqrt{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2}} \cos(-\varphi) \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-a(b^2 + \omega^2)A\omega + b(a^2 + \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} + \frac{(ab - \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{-a(b^2 + \omega^2)A\omega + b(a^2 + \omega^2)A\omega + (b-a)(ab - \omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(-ab^2 - a\omega^2 + ba^2 + b\omega^2 + ab^2 - b\omega^2 - a^2b + a\omega^2)A\omega}{(ab - \omega^2)^2 + (a+b)^2 \omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

初期条件を満足していることが確認された。

例題2の数学メモ

メモ1: 連立一次方程式の解

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

【演習問題】

- (1) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = A \sin \omega t$ の解を求めよ。ただし、 $y(0) = 0$ とする。

【略解】

$$\frac{dy_g(t)}{dt} + y_g(t) = 0 \text{ の解は、 } y_g(t) = ke^{-t} \text{ である。}$$

一方、 $\frac{dy_s(t)}{dt} + y_s(t) = A \sin \omega t$ を満足する定常解を $y_s(t) = B \sin(\omega t + \theta)$ と仮定すると

$$B\omega \cos(\omega t + \theta) + B \sin(\omega t + \theta) = A \sin \omega t \text{ より、 } B\sqrt{1+\omega^2} \sin(\omega t + \theta + \varphi) = A \sin \omega t \text{ が得られる。}$$

仮定した $y_s(t)$ が定常解であるには、 $B = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}}$ 、 $\theta = -\varphi = -\tan^{-1}(\omega)$ でなければならない。

以上より、 $y(t) = ke^{-t} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \omega)$ が得られる。

最後に初期条件を式に代入すると、 $0 = k + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(-\tan^{-1} \omega)$ となる。

$$k = -\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(-\tan^{-1} \omega) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\tan^{-1} \omega) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{A\omega}{1+\omega^2} \text{ であるから、}$$

初期条件を満足する解として、 $y(t) = \frac{A\omega}{1+\omega^2} e^{-t} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \omega)$ が求まる。

- (2) RL 直列回路に $t = 0$ で $e(t) = E \sin \omega t$ の電圧を加えた。回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。

ただし、 $R = 5[\Omega]$ 、 $L = 50/\pi[mH]$ 、 $E = 10[V]$ 、 $\omega = 100\pi[rad/sec]$ とし、 $i(0) = 0$ とする。

【略解】

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \sin \omega t$$

$$L \frac{di_g(t)}{dt} + Ri_g(t) = 0 \text{ の解は、 } i_g(t) = ke^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

次に定常解を求める。 $L \frac{di_s(t)}{dt} + Ri_s(t) = E \sin \omega t$ の解を $i_s(t) = B \sin(\omega t + \theta)$ と仮定すると、

$$LB\omega \cos(\omega t + \theta) + RB \sin(\omega t + \theta) = E \sin \omega t \text{ となる。}$$

$$B\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta + \varphi) = E \sin \omega t \text{ から、 } B = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}、\theta = -\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \text{ が}$$

求められる。よって、定常解は、 $i_s(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$ となる。

以上から、

$$i(t) = i_g(t) + i_s(t) = ke^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

が求められる。

初期条件は、 $i(0) = 0$ であるから、

$$0 = k + \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(-\varphi) \text{ より、 } k = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi) = \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$i(t) = \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

が得られる。

$R = 5[\Omega]$ 、 $L = 50/\pi[mH]$ 、 $E = 10[V]$ 、 $\omega = 100\pi[rad/sec]$ を代入すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \\ &= e^{-100\pi} + \sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。

【応答の計算】

Octave を利用して、電流をグラフ化してみる。


```

% RL series circuit with sinusoidal voltage
R=5;
L=50/pi*0.001;
E=10;
omega=100*pi;
T=L/R;
dt=T/100;
ft=30*T;
n=ft/dt;
ia=0;
y(1)=ia;
tim(1)=0;
ya(1)=0;
for i=1:n,
    t=dt*(i-1);
    iadot=-(R/L)*ia+(E/L)*sin(omega*t);
    ia=ia+iadot*dt;
    y(i+1)=ia;
    tt=dt*i;

ya(i+1)=exp(-100*pi*tt)+sqrt(2)*sin(100*pi
i*tt-pi/4);
    tim(i+1)=tt;
end;
subplot(2,1,1);
grid on;
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Current (A)');
title('numerical solution');
plot(tim,y);
subplot(2,1,2);
title('analytical solution');
plot(tim,ya);

```

【グラフ】

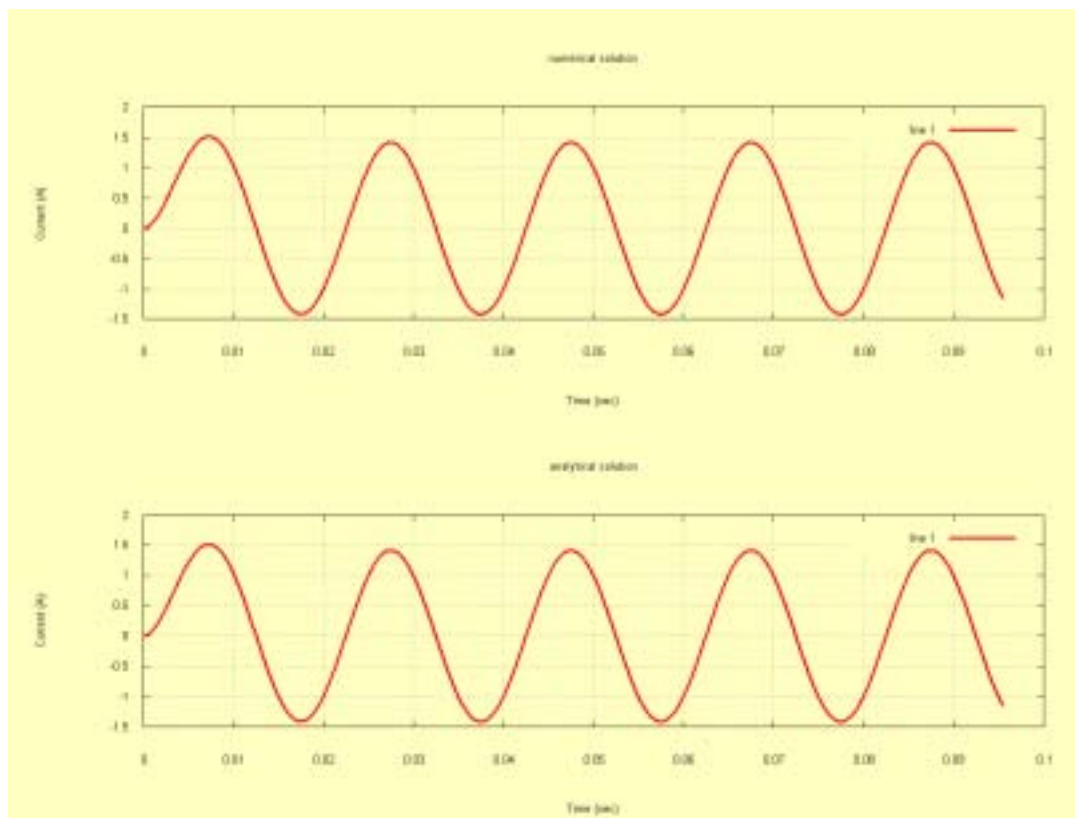


Fig. 2 数値解（上）と解析解（下）

定係数線形微分方程式の解法 (2)

定係数線形微分方程式とは、微分方程式の係数が定数で線形性が成立つ方程式であり、線形要素からなる電気回路や線形要素のみからなる力学系を数式として表現するとこの種の微分方程式となる。定係数線形微分方程式の解法 (1) では、過渡解と定常解の考え方で解を求めたが、本資料では、ラプラス変換とラプラス逆変換を用いた解法について説明する。

解き方<その2>

1 定義と意味

ラプラス変換は次式で定義される。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

式(1)で重要なことは、 $f(t)$ に e^{-st} を乗じて定積分をすところにある。積分が存在するということは式(1)がある有限な値をとることを意味する。簡単に説明すると次のようである。 $f(t)$ を区間 $[0, \infty]$ で定積分するとイメージとして積分結果が無限大になることが予想される。これでは困る。そこで、 e^{-st} を乗じた関数の積分を考えることにする。 $f(t)e^{-st}$ は面積を有限に出来そうである。 e^{-st} を乗じたのは簡単には面積を有限にするためであることがわかる。

2. 簡易表記

ラプラス変換： $F(s) = L\{f(t)\}$

ラプラス逆変換： $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ (後に説明する)

3 ラプラス変換の性質 (基本性質のみ)

(1) 線形性

$$L\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad (2)$$

(2) 推移則

$$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a) \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt = F(s_0) = F(s+a)$$

(3) 微分則

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(4) 最終値の定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0)\}$$

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0)\}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

(5) 初期値定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (6)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} [e^{-st}] dt = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[-f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

(6) 導関数

(6-1) 1階導関数

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \left[f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) [-s e^{-st}] dt \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \end{aligned} \quad (7)$$

(6-2) 2階導関数

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{dg(t)}{dt} \right\} = sG(s) - g(0), \quad g(0) = f'(0)$$

$$G(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = sG(s) - g(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (8)$$

4 代表的初等関数のラプラス変換

(1) ステップ関数

$$\int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = A \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right] + A \frac{1}{s} = A \frac{1}{s} \quad (9)$$

(2) 指数関数

$$\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (10)$$

(3) 正弦関数、余弦関数

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [\cos \omega t - j \sin \omega t] e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s+j\omega} e^{-(s+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+j\omega} = \frac{s-j\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} (\cos \omega t) e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (12)$$

(4) $e^{-at} \sin \omega t$

$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$ を利用する。

$$F(s) = L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ であるから、}$$

$$F(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$L\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (13)$$

(5) $te^{-at} \sin \omega t$

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$F(s) = L\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$L\{te^{-at} \sin \omega t\} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\omega(s+a)}{\{(s+a)^2 + \omega^2\}^2} \quad (14)$$

5. ラプラス逆変換

ラプラス変換は、式(1)に示したように $f(t)$ を $F(s)$ に変換する積分変換であった。ここでは、その逆について少々話をしておこう。

ラプラス逆変換は次式である。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (19)$$

式(19)において、 s は $s = \sigma + j\omega$ の複素数であるから、従来の実数積分と区別しなければならない。

複素数が積分変数の場合、その積分を複素積分と呼んでいる。そして、その積分方法は、実数の世界の積分とはかなり様子が違って来る。この辺りを詳しく知りたい人は複素関数論（単に関数論）として沢山の数学書が出版されているので参考にするとよい。

では、逆変換をどのように実行したらよいだろうか？

5. 1 ラプラス変換の結果を用いる方法

逆変換を行う方法としては変換表を用いることが一般的であり、またその方法で十分である。その方法の概要を説明すると、式(1)による変換結果を保存しておき（変換表を作成しておき）、その逆向きの操作で時間関数を求める方法が容易で理工学の分野ではよく使われる。

5. 1. 1 部分分数展開（その1）

ラプラス変換された結果はラプラス演算子 s に関する分数として与えられる。例えば、線形微分方程式の解を求める場合は、微分方程式をラプラス変換すると、その変換結果は代数方程式となる。この代数方程式の解をラプラス逆変換すると時間域の解となる。

簡単な例で説明する。

ラプラス変換結果が、

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)} \quad (20)$$

であったとする。

式(20)は、

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+a} \quad (21)$$

と展開できる。これを部分分数展開と呼ぶ。

k_1, k_2 は、

$$k_1 = \frac{1}{a}, \quad k_2 = -\frac{1}{a} \quad (22)$$

と求められる。

したがって、式(21)は

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \quad (23)$$

となる。

式(23)は、ステップ関数と指数関数の変換結果に等しい。

よって、時間関数に変換すると

$$f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \quad , \quad (t \geq 0) \quad (24)$$

となる。

5. 1. 2 まとめ(イメージアップ)

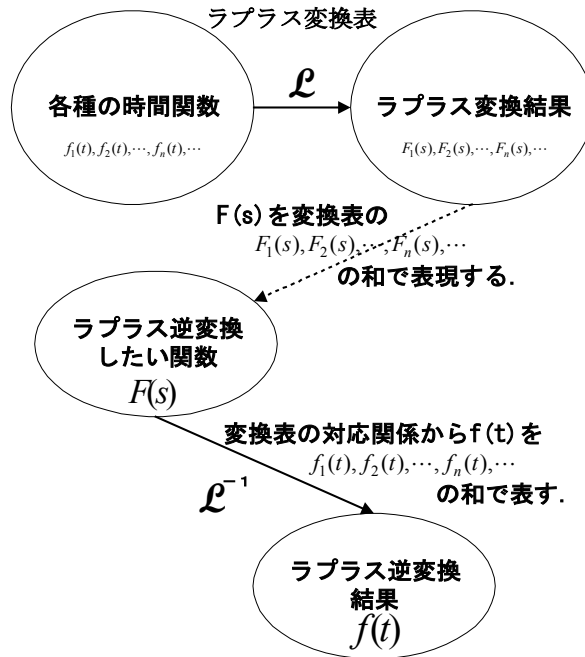


Fig. 1 ラプラス逆変換の方法 (ラプラス変換表による)

時間が許せば、逆変換(複素積分)の講義もしたいが、逆変換を行う上での利益はあまりないので当面は Fig. 1 の方法で逆変換は行うことにする。

したがって、逆変換しなければならない与えられた $F(s)$ をラプラス変換表の結果で如何に表現するかが重要となる。

5. 1. 3 部分分数展開 (その2)

5. 1. 1 でも部分分数の例を示したが、一般的な説明ではなかったので、再度説明をする。逆変換したい関数 $F(s)$ が次式で与えられているとする。

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (25)$$

① 単根の場合

式(25)の分母が次式のように因数分解される場合を考える。

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_n) \quad (26)$$

この場合は、

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \\
 &= \frac{k_1}{s + \lambda_1} + \frac{k_2}{s + \lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{s + \lambda_n}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

の形式に展開できるから問題は生じない。

問題は、次に述べる重複根が存在する場合である。

② 重複根がある場合

重複根が存在する場合は、ヘビサイドの展開定理を用いて、展開しなければならないがここではその結果のみを利用することにする。

慣性モーメントの計算法 (1)

本小冊子では、物体の慣性モーメントの計算についてまとめたものである。回転運動のある力学系では必要で不可欠な物理量である。

慣性モーメントの定義

剛体系を考える場合、並進運動と回転運動について考えなければならない。この際、重要となるのが慣性モーメントの概念である。ここでは、各種物体の慣性モーメントの計算法について解説する。

慣性モーメントの定義

3次元空間の剛体の慣性モーメントは、次式で定義される。

慣性モーメント「Kg・m²」

$$I = \iiint r^2 \rho dx dy dz \quad (1)$$

なお、各軸 x 軸、y 軸、z 軸に関する慣性モーメントをそれぞれ、 I_x, I_y, I_z とすると

$$I_x = \iiint \rho(y^2 + z^2) dx dy dz \quad (2)$$

$$I_y = \iiint \rho(z^2 + x^2) dx dy dz \quad (3)$$

$$I_z = \iiint \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \quad (4)$$

である。

以下、例を通して慣性モーメントの計算法、性質などについて述べる。

慣性モーメントの計算例

例題1 Fig. 1 の z 軸回りの慣性モーメントを求めよ。

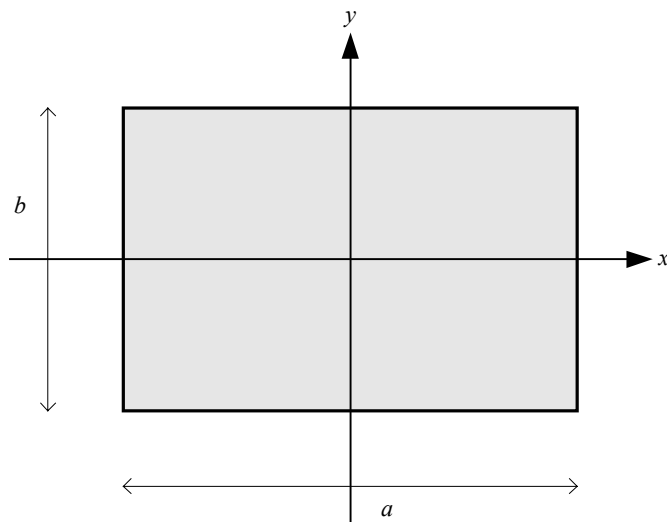


Fig. 1

全質量を M とすると、面密度は $\rho = \frac{M}{ab}$ である。

よって、

$$I_z = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (5)$$

となる。

また、 x 軸回りの慣性モーメントは

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{ab} (y^2 + z^2) dx dy = \frac{Mb^2}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (6)$$

となる。

さらに、 y 軸回りの慣性モーメントを求めると (xz 平面)

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{ab} (x^2 + z^2) dx dy = \frac{Ma^2}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (7)$$

となる。

x y 平面にある剛体 (この例では、 z 軸には厚みなし) の慣性モーメントには

$$I_z = I_x + I_y \quad (8)$$

の関係がある。

例題2 例題1の平板が x y 平面に対して θ なる角度を有する場合

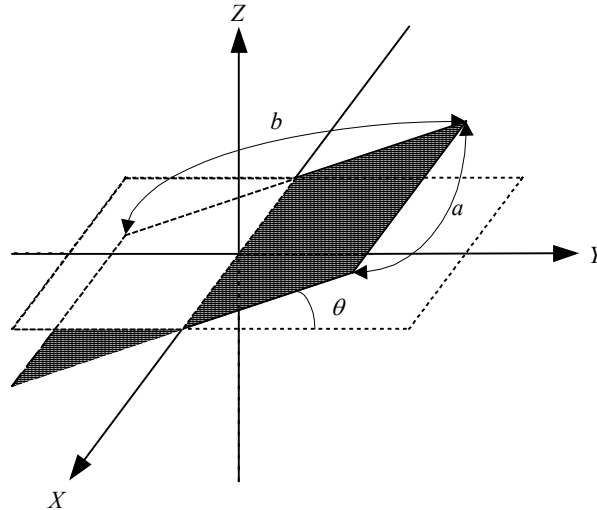


Fig. 2

① z 軸回りの慣性モーメント

x 軸の区間: $[-a/2, a/2]$

y 軸の区間: $[-b \cos \theta / 2, b \cos \theta / 2]$

z 軸の区間: $[-b \sin \theta / 2, b \sin \theta / 2]$

全質量を M とすると、面密度は $\rho = \frac{M}{ab}$ である。

傾きのある平面の XY 面への正射影を考える。このとき、面積は、 $ab \cos \theta$ である。したがって、密度が $\rho_z = M / ab \cos \theta$ である。

$$I_z = \int_{-\frac{b \cos \theta}{2}}^{\frac{b \cos \theta}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho_z (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M(a^2 + b^2 \cos^2 \theta)}{12} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (9)$$

となる。

② x 軸回りの慣性モーメント

また、 x 軸回りの慣性モーメントは、配置から明らかなように前例と同一である。

$$I_x = \frac{Mb^2}{12} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (10)$$

③ y 軸回りの慣性モーメント

さらに、 y 軸回りの慣性モーメントを求める。 xz 平面への射影部は、面積として $ab \sin \theta$ であるから、射影部の密度は、 $\rho_y = M / ab \sin \theta$ である。

$$I_y = \int_{-\frac{b \sin \theta}{2}}^{\frac{b \sin \theta}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho_y (x^2 + z^2) dx dz = \frac{M(a^2 + b^2 \sin^2 \theta)}{12} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (11)$$

となる。

例題3 立体物の慣性モーメント

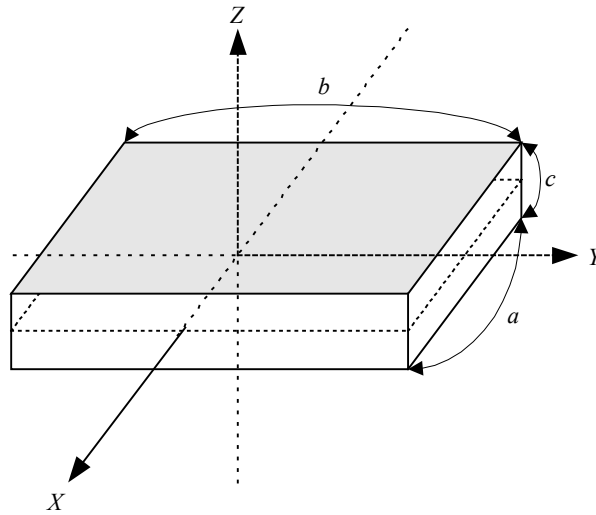


Fig. 3

z 軸に c なる厚さを持つ 3 次元剛体を考え、各軸での慣性モーメントを計算する。

x 軸の区間： $[-a/2, a/2]$

y 軸の区間： $[-b/2, b/2]$

z 軸の区間： $[-c/2, c/2]$

全質量を M とすると、体積密度は $\rho = \frac{M}{abc} [\text{Kg}/\text{m}^3]$ である。

① z 軸回り

$$I_z = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{abc} (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (12)$$

となる。

② x 軸回り

また、x 軸回りの慣性モーメントは

$$I_x = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{abc} (z^2 + y^2) dx dy dz = \frac{M(b^2 + c^2)}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (13)$$

③ y 軸回り

さらに、y 軸回りの慣性モーメントを求めると

$$I_y = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{abc} (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M(a^2 + c^2)}{12} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (14)$$

となる。

例題4 XY平面内にある半径 a の円板。z 軸の厚みは考えない。円板の質量を M とする。

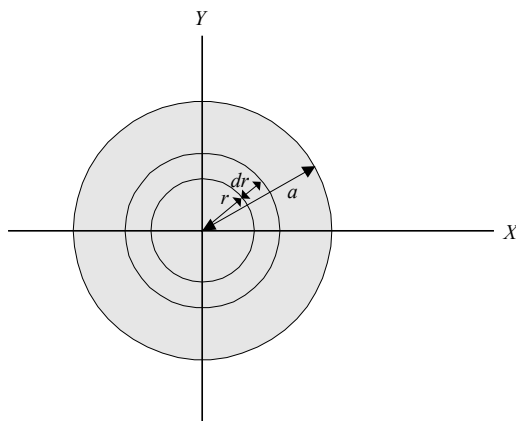


Fig. 4

面密度は、 $\rho = \frac{M}{\pi a^2}$ である。dr 部分の円環による慣性モーメントを dI_z とすると $dI_z = r^2 \rho 2\pi dr$

よって、z 軸回りの慣性モーメントは次式で表される。

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = 2\pi \frac{M}{\pi a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2} \quad (15)$$

また、x および y 軸慣性モーメントは、

$$I_z = I_x + I_y \quad (16)$$

の関係と

$$I_x = I_y \quad (17)$$

より

$$I_x = I_y = \frac{Ma^2}{4} \quad (18)$$

である。

例題5 例題4の円板から半径bの部分を取り除かれた中空の円板の慣性モーメントを求めよ。

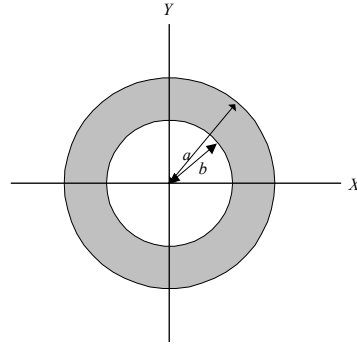


Fig. 5

物体の面密度は、 $\rho = \frac{M}{\pi a^2}$ である。dr部分の円環による慣性モーメントをdIzとすると

$$dI_z = r^2 \rho 2\pi r dr \tag{19}$$

よって、

$$I_z = 2\pi\rho \int_b^a r^3 dr = 2\pi \frac{M}{\pi a^2} \frac{a^4 - b^4}{4} = \frac{M(a^4 - b^4)}{2a^2} \tag{20}$$

また、前例と同様に

$$I_x = I_y = \frac{M(a^4 - b^4)}{4a^2} \tag{21}$$

である。

[参考]

半径aの円板の慣性モーメントは、

$$I_a = \frac{Ma^2}{2}$$

また、半径bの円板の慣性モーメントは、半径bの円板の質量を m_b とすると

$$I_b = \frac{m_b b^2}{2}$$

である。

密度は、

$$\rho = \frac{M}{\pi a^2}$$

であるから、半径bの円板の質量は

$$m_b = \frac{M}{\pi a^2} \cdot \pi b^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 M$$

したがって、全体のモーメントは

$$I = I_a - I_b = \frac{M(a^4 - b^4)}{2a^2}$$

となる。取り除いた部分の慣性モーメントを引算すればよいことになる

例題6 Fig. 6、Fig. 7、Fig. 8、Fig. 9のz軸回りの慣性モーメントを求めよ。平行移動したときの慣性モーメントを求める。計算は、定義にしたがって行うが、この例題を通して重心回りの慣性モーメントに平行移動による影響部分の慣性モーメントが加算されていることを理解する。

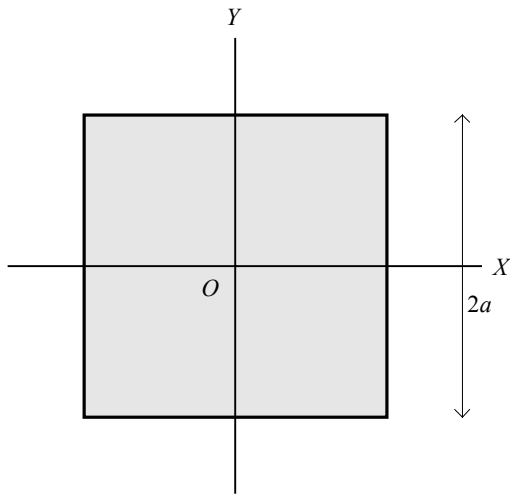


Fig. 6

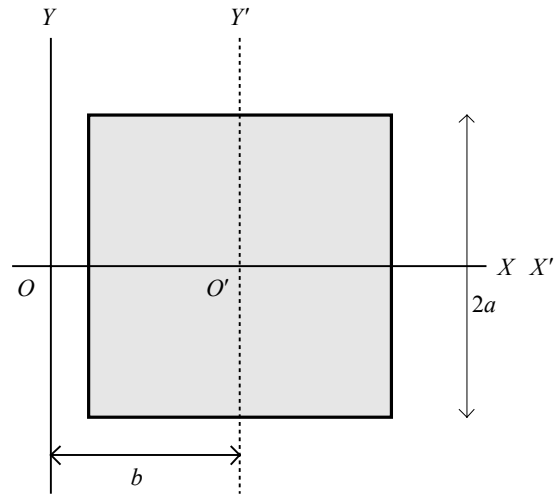


Fig. 7

Fig. 6の場合、

$$I_{z_1} = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{2Ma^2}{3} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (22)$$

Fig. 7の場合、

$$\begin{aligned} I_{z_2} &= \int_{-a}^a \int_{b-a}^{b+a} \frac{M}{4a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [(x'+b)^2 + y'^2] dx' dy' \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [x'^2 + 2bx' + b^2 + y'^2] dx' dy' \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [x'^2 + y'^2] dx' dy' + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [2bx' + b^2] dx' dy' \\ &= I_{z_1} + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [2bx' + b^2] dx' dy' = \frac{2Ma^2}{3} + Mb^2 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \end{aligned} \quad (23)$$

次に Fig. 8 の場合を考える。x、y 両軸ともに平行移動した場合。

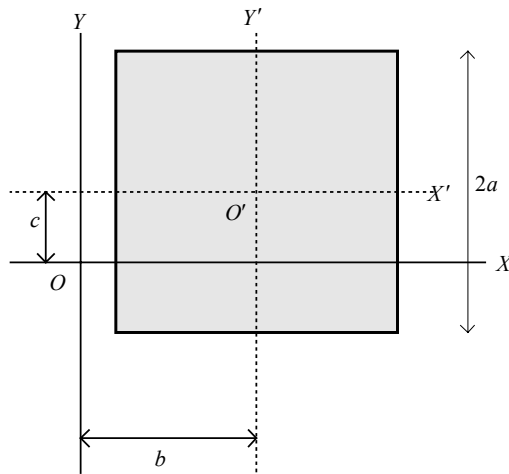


Fig. 8

$$\begin{aligned}
 I_{z3} &= \int_{c-a}^{c+a} \int_{b-a}^{b+a} \frac{M}{4a^2} (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [(x' + b)^2 + (y' + c)^2] dx' dy' \\
 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [x'^2 + 2bx' + b^2 + y'^2 + 2cy' + c^2] dx' dy' \\
 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [x'^2 + y'^2] dx' dy' \\
 &\quad + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [2bx' + b^2 + 2cy' + c^2] dx' dy' \\
 &= I_{z1} + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [2bx' + b^2] dx' dy' \\
 &\quad + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{M}{4a^2} [2cy' + c^2] dx' dy' \\
 &= \frac{2Ma^2}{3} + M(b^2 + c^2) \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2]
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

次に Fig. 9 の場合を考える。原点間の距離が L で角度が θ のとき。

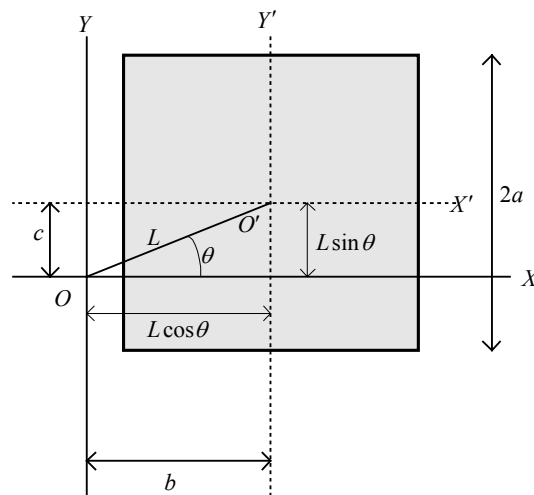


Fig. 9

$$\begin{aligned}
 I_{z4} &= \frac{2Ma^2}{3} + M(b^2 + c^2) \\
 &= \frac{2Ma^2}{3} + ML^2 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2]
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

計算結果から、平行移動した物体の慣性モーメント I は、重心回りの慣性モーメント I_g と Md^2 の和で表されることが分かった。ただし、 M は物体の質量、 d は、回転軸から重心までの距離である。(参考：平行軸の定理は、重心回りの慣性モーメントが既知であると簡単な計算で他の軸回りの慣性モーメントを求めることができる。)

例題7 XYZ座標原点に重心がある半径Rの球体の慣性モーメントを求めよ。球体の質量をMとする。

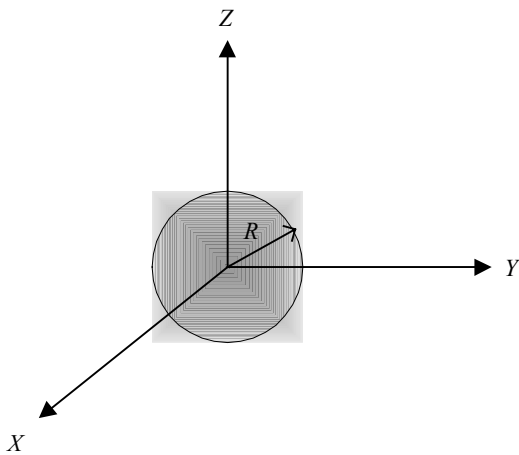


Fig. 10

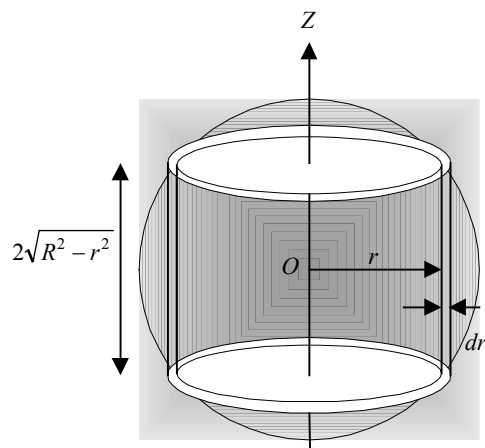


Fig. 11

対称性より、どの軸に対しても同一の慣性モーメントになる。球の体積は、 $(4/3)\pi R^3$ であり、質量を M とすると体積密度は、 $\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$ である（参考：球の表面積は、 $4\pi R^2$ である）。

球の慣性モーメントを計算するために、Fig. 11 を考える。球に内接する円柱と dr だけ大きい円柱を考える。

このとき、 r と $r+dr$ 間の体積 dv は、

$$dv = 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} dr \quad (26)$$

となる。

したがって、質量は、

$$dm = \rho dv = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{3M}{R^3} r \sqrt{R^2 - r^2} dr \quad (27)$$

である。

したがって、

$$dI_z = r^2 dm = \frac{3M}{R^3} r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr \quad (28)$$

である。

よって、モーメントを I_G とすると

$$I_G = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{2}{5} MR^2 \quad (29)$$

となる。

次に Fig. 12 について考える。

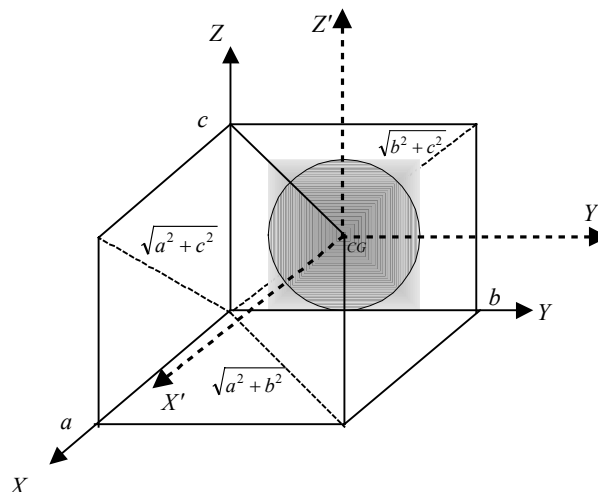


Fig. 12

Fig. 12 に対しては、平行軸の定理を用いることで

$$I_Z = I_G + M(a^2 + b^2) = \frac{2}{5}MR^3 + M(a^2 + b^2) \quad (30)$$

となる (z 軸回り)。

また、x 軸回りのモーメントは、

$$I_X = I_G + M(a^2 + c^2) = \frac{2}{5}MR^3 + M(a^2 + c^2) \quad (31)$$

y 軸回りのモーメントは、

$$I_Y = I_G + M(b^2 + c^2) = \frac{2}{5}MR^3 + M(b^2 + c^2) \quad (32)$$

である。

例題 8 円柱の中心線が z 軸に一致。長さ $2L$ のモーメントを求めよ。質量中心は、原点 0 にある。

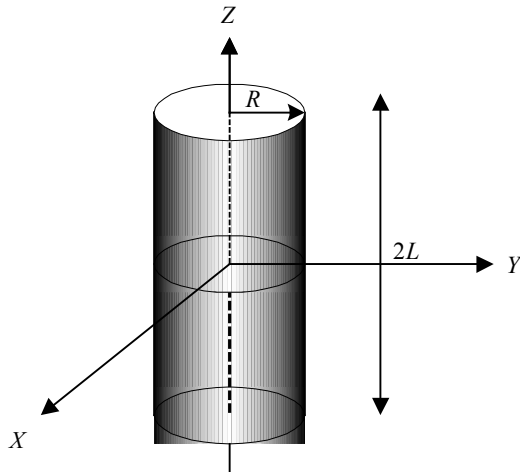


Fig. 13

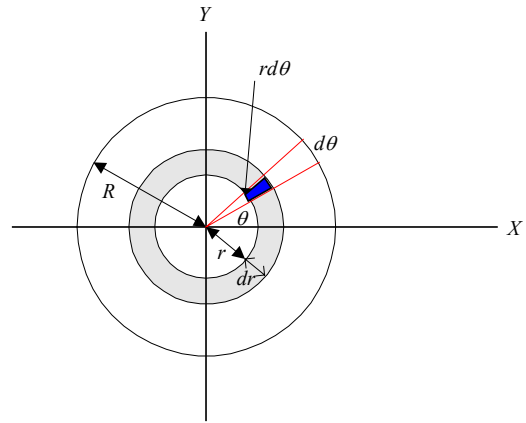


Fig. 14

XY 平面での断面に対して、Fig. 14 のような変数を定義すると、 $x y$ 座標は r と θ を用いて

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, x^2 + y^2 = r^2 \quad (33)$$

となる。

dr と $d\theta$ で挟まれた微小面積を ds とすると次式で表すことができる。

$$ds = r dr d\theta \quad (34)$$

したがって、 z 軸の微小分も考慮すると単位体積として

$$dv = r dr d\theta dz \quad (35)$$

を得る。

ところで質量は、

$$dm = \rho dx dy dz = \rho dv = \rho r dr d\theta dz \quad (36)$$

である。

よって、 z 軸回りの慣性モーメントは、

$$I_z = \iiint \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^3 dr d\theta dz = \frac{\rho R^4}{4} (2\pi)(2L) = \rho R^4 \pi L \quad (37)$$

となる。

密度

$$\rho = \frac{M}{2\pi R^2 L} \quad (38)$$

を式(37)に代入すると次式を得る。

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2 \quad (39)$$

次に、 x 軸、 y 軸回りの慣性モーメントを求める。

$$I_x = \iiint \rho(y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{4} \sin^2 \theta + \frac{R^2}{2} z^2 \right] d\theta dz \\
&= \rho R^2 \pi \int_{-L}^L \left[\frac{R^2}{4} + z^2 \right] dz \\
&= \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{3} ML^2 \tag{40}
\end{aligned}$$

なお、 $I_X = I_Y$ である。

例題9 例題8の円柱がz軸に平行でXY座標がa, bであるときの、各軸回りのモーメントを求めよ。

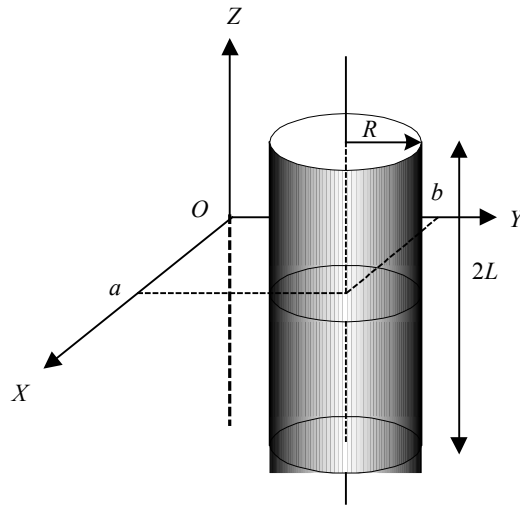


Fig. 15

例題8の結果に対して、平行軸の定理を適用すればよい。

$$I_Z = \frac{1}{2} MR^2 + M(a^2 + b^2) \tag{41}$$

$$I_X = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{3} ML^2 + Mb^2 \tag{42}$$

$$I_Y = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{3} ML^2 + Ma^2 \tag{43}$$

例題 10 Fig. 16 に示す質量 m の中空の鋼管がある。Z 軸回りの慣性モーメントを求めよ。

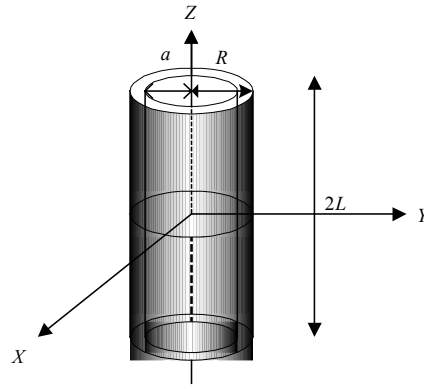


Fig. 16

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \iiint \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \int_a^R \rho r^3 dr d\theta dz \\
 &= \frac{\rho(R^4 - a^4)}{4} (2\pi)(2L) = \rho(R^4 - a^4)\pi L
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

鋼管の質量を M とすると密度は

$$\rho = \frac{M}{2\pi(R^2 - a^2)L}
 \tag{45}$$

であるから、慣性モーメントは次式となる。

$$I_Z = \frac{M}{2}(R^2 + a^2)
 \tag{46}$$

例題 11 Fig. 17 の z 軸回りの慣性モーメントを求めよ。

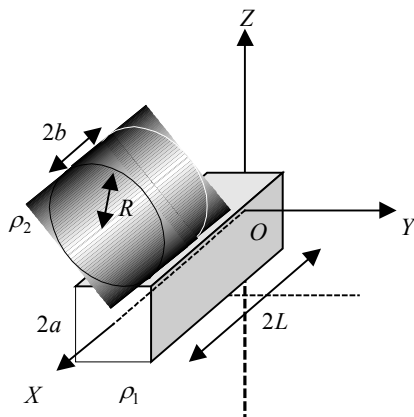


Fig. 17

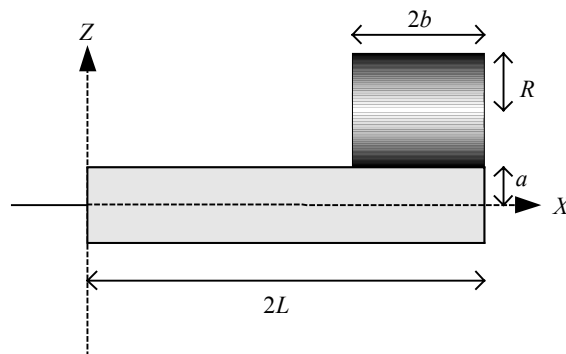


Fig. 18

角柱と円柱の慣性モーメントを算出し、加算し全体の慣性モーメントを求める。なお、角柱と円柱のモーメントは、重心周りの慣性モーメントを算出し、平行軸の定理を適用して算出する。

①角柱部

重心回りの慣性モーメント I_{SGZ} は、

$$I_{SGZ} = \iiint \rho_1(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-L}^L \rho_1(x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{1}{3} m_1(a^2 + L^2) \quad (47)$$

平行軸の定理により、角柱の z 軸回りの慣性モーメント I_{SZ} は、

$$I_{SZ} = I_{SGZ} + m_1 L^2 = \frac{1}{3} m_1(a^2 + L^2) + m_1 L^2 = \frac{1}{3} m_1(a^2 + 4L^2) \quad (48)$$

となる。

②円柱部

円柱部の重心回りの慣性モーメントを I_{CGZ} とすると

$$I_{CGZ} = \frac{1}{4} m_2 R^2 + \frac{1}{3} m_2 b^2 \quad (49)$$

である。

したがって、平行軸の定理より、円柱部の z 軸回りの慣性モーメント I_{CZ} は、

$$I_{CZ} = I_{CGZ} + m_2(2L - b)^2 = \frac{1}{4} m_2 R^2 + \frac{1}{3} m_2 b^2 + m_2(2L - b)^2 \quad (50)$$

となる。

したがって、全体の z 軸回りの慣性モーメント I_Z は、

$$I_Z = I_{SZ} + I_{CZ} = \frac{1}{3} m_1(a^2 + 4L^2) + \frac{1}{4} m_2 R^2 + \frac{1}{3} m_2 b^2 + m_2(2L - b)^2 \quad (51)$$

である。

物理系のモデル化と解析の種類

【1】物理系の数式に関すること

- ① 物理系は、微分方程式で表現できる。
- ② 微分方程式とは導関数を含む方程式である。
- ③ 物理系の数式モデルが微分方程式となる場合には、物理系を構成する要素としてエネルギーを蓄積するものが必ず存在する。
- ④ エネルギーを蓄積する要素は、力学系の場合は、質量とバネであり、電気系の場合は、コイルとキャパシタ（コンデンサ）である。
- ⑤ エネルギーを蓄積する要素が存在しない系の数式モデルは、代数方程式となる。

【2】物理系解析の種類

- ① 解析を大別すると、過渡解析と定常解析に分けられる。
- ② 過渡解析とは、ある時点から現在に至るまでの系の状態を調べることである。
- ③ 定常解析とは、時間が十分に経過した時点での系の状態を調べることである。
- ④ 過渡解析は、定常解析を含んでいる。
- ⑤ 過渡解析とは、初期条件を満足する微分方程式の解を求めることである。

レポート 1

問題

Fig. 1 に示す RL 回路において、 $t=0$ にてスイッチ SW. を ON にした。回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。但し、次の順序で解答すること。

- Step. 1 モデル(回路に成立する数式)を求めよ。
- Step. 2 Step. 1 で求めた式のラプラス変換形を求めよ。
- Step. 3 Step. 2 で求めた式にラプラス逆変換を施し電流 $i(t)$ を求めよ。

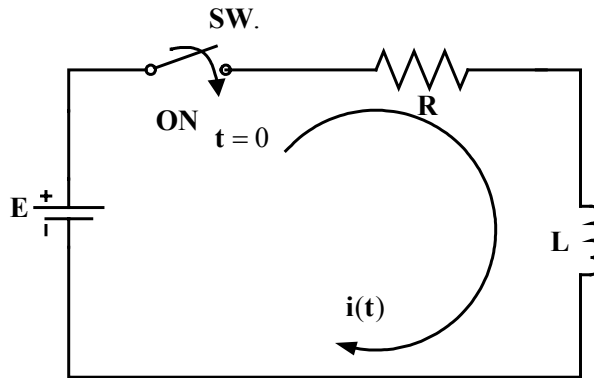


Fig. 1 RL 回路

解答

Step. 1

Fig. 2 に各素子に生じる電圧を示す。

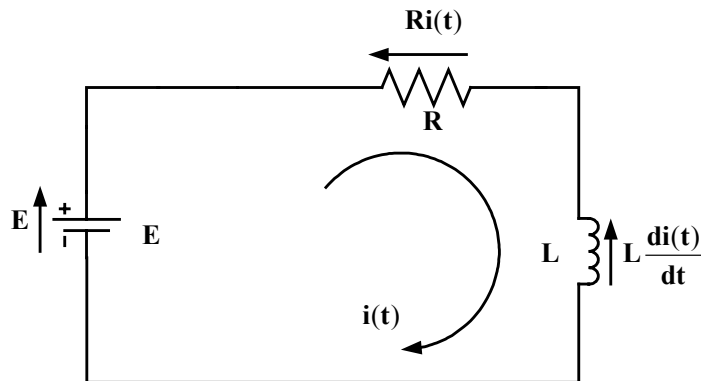


Fig. 2

方向に注意しつつ電圧平衡式を求めると次式のようなになる。

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \quad (t \geq 0) \tag{1}$$

Step. 2

次に先ほど求めた式にラプラス変換を施す。
まず、ラプラス変換についておさらいしてみる。
ラプラス変換の定義式は、

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2)$$

である。ここで、

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s) \quad (3)$$

とすると、大きさ E のステップ関数のラプラス変換は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E\} &= \int_0^{\infty} Ee^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{E}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{E}{s} \end{aligned} \quad (4)$$

となり、

$\frac{di(t)}{dt}$ のラプラス変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt = [e^{-st}i(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} i(t)e^{-st} dt = sI(s) - i(0) \quad (5)$$

※ $i(0)$ は初期条件

よって、式(1)にラプラス変換を施すと、

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = \frac{E}{s} \quad (6)$$

となる。式(6)を電流の式にするために変換すると、

$$\begin{aligned} (Ls + R)I(s) &= \frac{E}{s} + Li(0) \\ I(s) &= \frac{E}{s(Ls + R)} + \frac{Li(0)}{Ls + R} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

Step. 3

求めた式(7)に逆ラプラス変換を施す。

条件として、 $t=0$ とあるから SW. は OFF となり、 $i(0)=0$ (初期条件)となる。

よって先ほど求めた式(7)は、

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} \quad (8)$$

となる。

さらに、式(8)を

$$I(s) = \frac{\frac{E}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{R}{L}} \quad (9)$$

とする。式(9)の右辺は、部分分数展開と呼ぶ。

式(9)において、左辺と右辺が等しくなるように k_1 , k_2 を求める。

$$\frac{\frac{E}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{k_1\left(s + \frac{R}{L}\right) + k_2s}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} \quad (10)$$

式(10)より、

$$\frac{E}{L} = k_1\left(s + \frac{R}{L}\right) + k_2s = (k_1 + k_2)s + k_1\frac{R}{L} \quad (11)$$

となり、式(11)より、

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1\frac{R}{L} = \frac{E}{L} \end{cases} \quad (12)$$

となる。式(12)を解くと、次式となる。

$$k_1 = \frac{E}{R}, \quad k_2 = -\frac{E}{R} \quad (13)$$

よって、

$$I(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s} - \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{R}{L}} \quad (14)$$

となる。

また、指数関数 e^{-at} のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (15)$$

であるから、式(14)の逆変換は、

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (16)$$

となる。

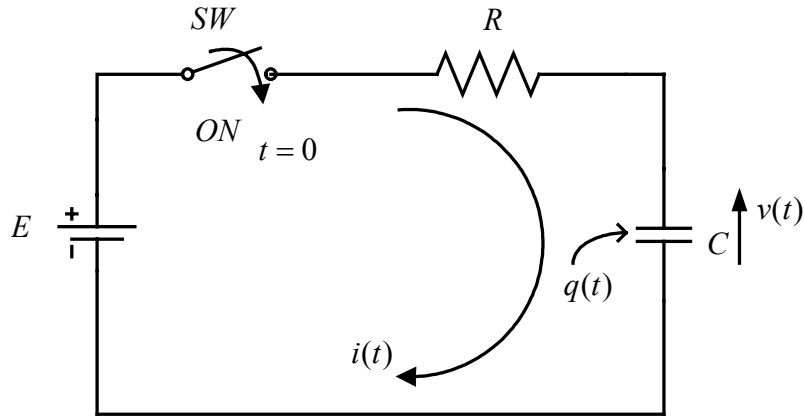


Fig. 1

問題

Fig. 1 に示す RC 回路に対して以下の問いに答えよ。ただし、 $t=0$ で SW を ON とする。

①モデル(回路方程式)を求めよ。

- ①-1 電流 $i(t)$ に関する方程式
- ①-2 電荷 $q(t)$ に関する方程式
- ①-3 電圧 $v(t)$ に関する方程式

② $i(t), q(t), v(t)$ を求めよ。ただし、コンデンサには初期電荷はないものとする。 ($q(0)=0$)

解答

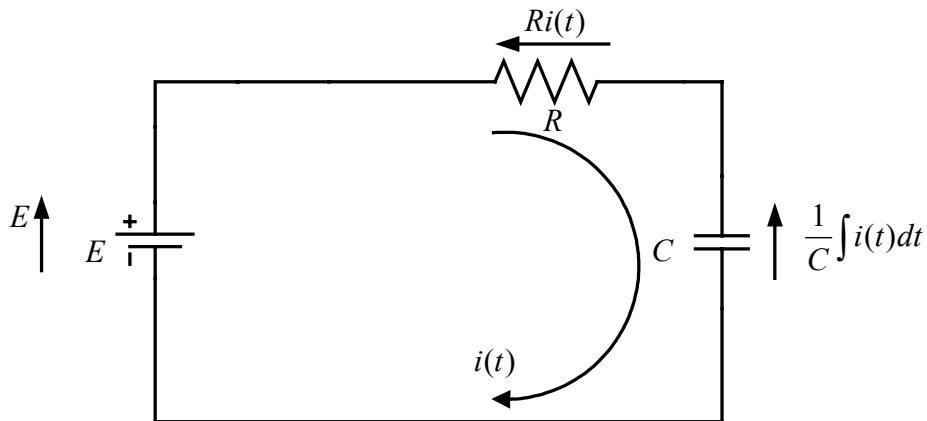


Fig. 2

① Fig. 2 より

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (1) \quad \text{①-1}$$

となる。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2)$$

であるから、式(2)を式(1)に代入すると

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E \quad (3) \quad \text{①-2}$$

となる. さらに

$$q(t) = Cv(t) \quad (4)$$

を式(3)に代入すると

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (5) \quad \textcircled{1}-3$$

が求められる.

② 式(3)をラプラス変換すると

$$R\{sQ(s) - q(0)\} + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{E}{s} \quad (6)$$

となる.

題意より, $q(0) = 0$ であるから

$$\left(Rs + \frac{1}{C}\right)Q(s) = \frac{E}{s} \quad (7)$$

$$Q(s) = \frac{E}{s\left(Rs + \frac{1}{C}\right)} = \frac{\frac{E}{R}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (8)$$

式(8)を部分分数に展開すると, 次式となる.

$$Q(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{RC}} \quad (9)$$

式(9)より

$$k_1 = CE, k_2 = -CE \quad (10)$$

となる.

よって, 式(9)のラプラス逆変換を求めると

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (11)$$

となる. また

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (12)$$

$q(t) = Cv(t)$ より, $v(t) = \frac{1}{C}q(t)$ であるから

$$v(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (13)$$

となる.

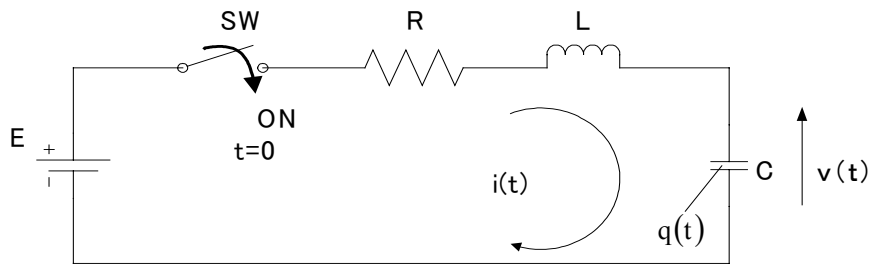


Fig. 1 RLC回路

問題

Fig. 1 に示す RLC 回路に対して以下の問いに答えよ。ただし、コンデンサの初期電荷は 0 とする。

- ① 電流 $i(t)$ に関する方程式を求めよ。
- ② 電荷 $q(t)$ に関する方程式を求めよ。
- ③ 電圧 $v(t)$ に関する方程式を求めよ。

解答

① Fig. 1 の回路において各素子にかかる電圧は Fig. 2 のようになる。

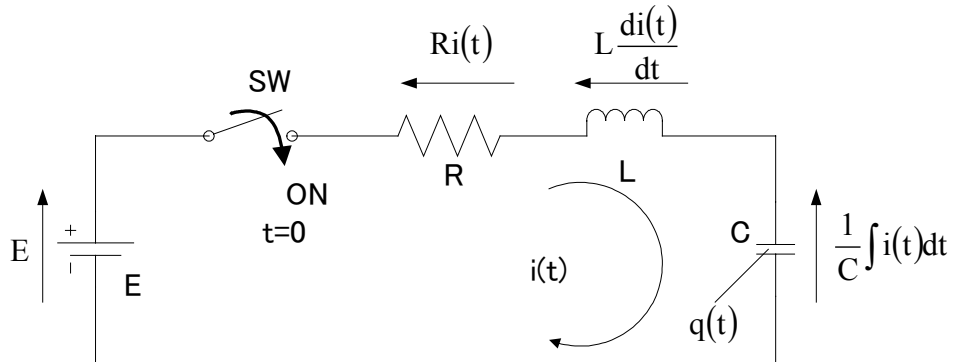


Fig. 2

よってキルヒホッフの電圧則より、

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (1)$$

② $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ であるので、式(1)に代入すると、

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E \quad (2)$$

③ $q(t) = Cv(t)$ であるので、式(2)に代入すると、

$$LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (3)$$

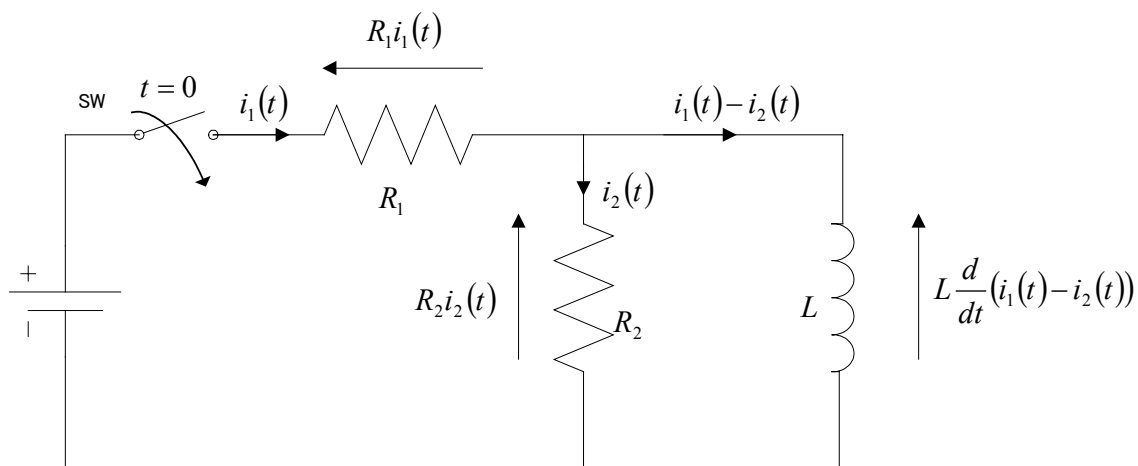


Fig1

問題

Fig1 において電流 $i_1(t)$, $i_2(t)$ を求めよ. $i_1(0) = i_2(0) = 0$ とする

解答 ① $R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = E$ (1)

② $L \frac{d}{dt} (i_1(t) - i_2(t)) - R_2 i_2(t) = 0$ (2)

式(1), (2)をラプラス変換すると,

$$R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) = \frac{E}{s} \quad (3)$$

$$L \{s I_1(s) - i_1(0) - s I_2(s) + i_2(0)\} - R_2 I_2(s) = 0 \quad (4)$$

となる. $i_1(0) = i_2(0) = 0$ であるから, 式(4)は次式のように整理できる.

$$L s I_1(s) - (L s + R_2) I_2(s) = 0 \quad (5)$$

式(3)と式(5)を行列形式で表記すると次式になる.

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)より

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{s} & R_2 \\ 0 & -(L s + R_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{E(L s + R_2)}{s}}{-R_1(L s + R_2) - R_2 L s} \\ &= \frac{E(L s + R_2)}{s((R_1 + R_2)L s + R_1 R_2)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{\begin{vmatrix} R_1 & \frac{E}{s} \\ L s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{E L s}{s}}{-R_1(L s + R_2) - R_2 L s} \\ &= \frac{E L}{(R_1 + R_2)L s + R_1 R_2} \end{aligned} \quad (8)$$

式(7), (8)のラプラス逆変換を求める.

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= L^{-1} \left[\frac{E(Ls + R_2)}{s\{(R_1 + R_2)Ls + R_1R_2\}} \right] \\
 &= L^{-1} \left[\frac{EL}{(R_1 + R_2)Ls + R_1R_2} \right] + L^{-1} \left[\frac{ER_2}{s\{(R_1 + R_2)Ls + R_1R_2\}} \right] \\
 &= L^{-1} \left[\frac{\frac{E}{R_1 + R_2}}{s + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] + L^{-1} \left[\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] \\
 &= \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}t} + L^{-1} \left[\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_2} \frac{R_2}{s + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] \\
 &= \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}t} + \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}t} \right) \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= L^{-1} \left[\frac{EL}{(R_1 + R_2)Ls + R_1R_2} \right] = L^{-1} \left[\frac{\frac{EL}{(R_1 + R_2)L}}{s + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] \\
 &= \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}t} \tag{10}
 \end{aligned}$$

【参考】

$t = \infty$ での $i_1(t)$ と $i_2(t)$ を求めよ.

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R_1}, \quad i_2(\infty) = 0$$

レポート 5

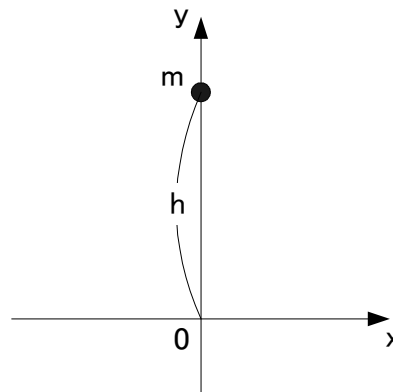


Fig. 1

問題

Fig. 1のように, 質量 m [kg]の物体が高さ h [m]で静止している. この状態から自由落下させた時のモデルを求め, 解を導出せよ. また, 重力加速度を g [m/s^2]とし, 摩擦は考えないものとする.

解答

y 軸を重力方向とすると, 質量 m の物体の変位は $y(t)$ [m]となる.

その時の速度は

$$\frac{dy}{dt} [m/s] \quad (1)$$

であり、更に加速度は

$$\frac{d^2y}{dt^2} [m/s^2] \quad (2)$$

で表される。

よって、

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad (3)$$

が成立し、両辺 m で割ると

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (4)$$

となる。

式(4)を積分範囲 $[0, t]$ で積分する。

$$\int_0^t \frac{d^2y}{dt^2} dt = -\int_0^t g dt \quad (5)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt \quad (6)$$

式(6)において

$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は $t=0$ での速度(初期速度)のことである。題意より、 $t=0$ の時、静止状態であるから、 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$

である。

よって、

$$\frac{dy}{dt} = -gt \quad (7)$$

となり、式(7)を更に積分すると

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = -\int_0^t g t dt \quad (8)$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2} g t^2 \quad (9)$$

ここで、初期位置は高さ $h[m]$ なので、 $y(0) = h$ となる。

よって、

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (10)$$

となる。

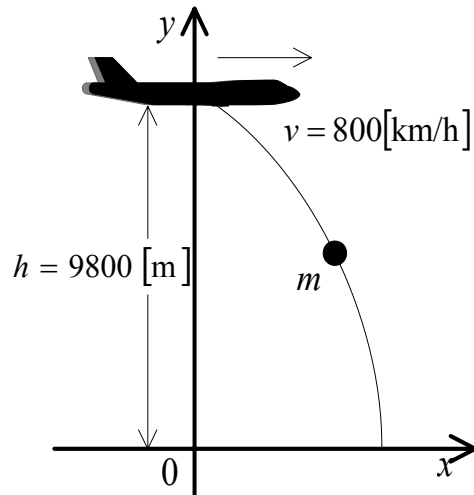


Fig. 1

問題

Fig. 1 に示すように地上 9800 [m] 上空を飛行機が時速 800 [km/h] で飛んでいる。
この飛行機より物体を落下させたとき、物体は何 m 先に落下するか。ただし、摩擦は無視する。

解答

現時点での飛行機の位置が x 軸の原点で、高さ h [m] にあるとする。
ここで、 x 軸方向および y 軸方向それぞれの運動方程式を立てると

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 & (1) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg & (2) \end{cases}$$

式(1), (2)が成立する。

式(1)を解く、つまり式(1)を積分すると

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

更に,

$$\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = v_x(0) \quad (4)$$

とかけるので、式(3)は

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(0) \quad (5)$$

となる。

ここで、 $v_x(0) = 800$ [km/h] より秒速 [m/sec] に変換すると

$$v_x(0) = 800 \cdot 10^3 / (60 \cdot 60) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \text{ [m/sec]}$$

式(5)より,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \quad (6)$$

更に、式(5)を積分すると

$$x(t) - x(0) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot t \quad (7)$$

$x(0)$ は原点にあるため0となる。

従って、

$$x(t) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot t \text{ [m]} \quad (8)$$

である。

次に、式(2)より

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (9)$$

を得る。式(9)を積分すると

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt \quad (10)$$

ここで、 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は物体は自由落下しているの、初速度は0[m/sec]となる。

よって、式(10)は

$$\frac{dy}{dt} = -gt \quad (11)$$

式(11)を更に積分すると

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (12)$$

式(12)の $y(0)$ は9800[m]より

$$y(t) = 9800 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (13)$$

式(13)より地上に達する時間を求める、つまり

$$9800 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

より

$$t^2 = \frac{2 \cdot 9800}{g} = \frac{2 \cdot 9800}{9.8} = 2000$$

(\because 重力加速度 g は、 $9.8[\text{m/s}^2]$)

$$t = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}[\text{sec}] \quad (14)$$

よって、物体の x 軸方向に進んだ距離は式(14)の時間を式(8)に代入して

$$\begin{aligned}
x &= \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot 20\sqrt{5} \\
&= \frac{16\sqrt{5}}{3.6} \times 10^3 \text{ [m]} \\
&= \frac{16\sqrt{5}}{3.6} \text{ [km]} \\
&= 9.9381 \text{ [km]}
\end{aligned}
\tag{15}$$

摩擦がないと約10[km]先に落下することになる。

類似問題

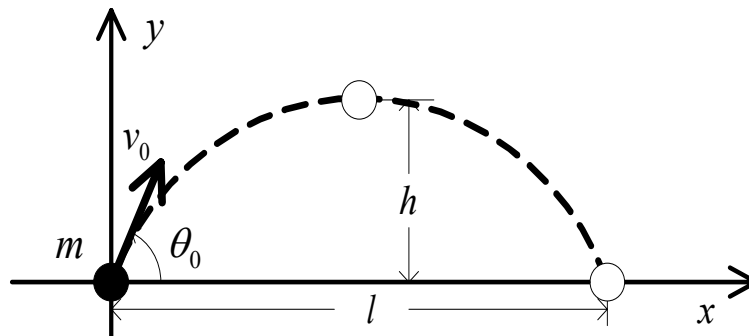


Fig. 2

問題

Fig. 2 に示すように、質量 m の物体を初速度 v_0 [m/sec] で打ち上げた。運動を解析せよ。

解答

物体は θ_0 方向に初速度 v_0 [m/sec] である。

x 軸, y 軸成分の速度は

$$\begin{aligned}
v_x(0) &= v_0 \cos \theta_0 \\
v_y(0) &= v_0 \sin \theta_0
\end{aligned}
\tag{1}$$

である。

x 軸, y 軸それぞれの運動方程式を考える

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0
\tag{2}$$

$$m \frac{dy^2}{dt^2} = -mg
\tag{3}$$

である。

式(2)を解く, つまり積分すると

$$\left. \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}$ は初速度の x 軸方向成分なので, 式(1)より

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta_0 \quad (4)$$

式(4)を積分すると

$$x(t) - x(0) = v_0 \cos \theta_0 \cdot t$$

$x(0)$ は、初期位置が原点なので0

$$x(t) = v_0 \cos \theta_0 \cdot t \quad (5)$$

次に式(3)を解く、式(2)と同様に積分をおこなう

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt$$

同様に、 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は初速度のy軸方向成分なので、式(1)より

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (6)$$

式(6)を更に積分すると

$$y(t) - y(0) = v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$y(0)$ も、初期位置が原点なので0

$$y(t) = v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (7)$$

ここで、Fig. 2 に示した h, l の導出を行う

h は、 $y(t)$ の最高点である、このときの時間を t_h と置く。

y軸方向の速度は0なので、式(6)より

$$v_0 \sin \theta_0 - gt_h = 0$$

より

$$t_h = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (8)$$

式(8)を式(7)に代入すると

$$h = y(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} [\text{m}] \quad (9)$$

次に、 l は $y(t)$ が0となる時（このときの時間を t_l とする）なので式(7)より

$$v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

より

$$\left(v_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2}gt \right) t = 0$$

となるので、

$$t = 0$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

となる。今回、0でないことは明らかなので、

$$t_l = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (10)$$

式(10)を式(5)に代入する

$$\begin{aligned} x(t_l) &= \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} [\text{m}] \end{aligned} \quad (11)$$

と表せる。

レポート 7

問題

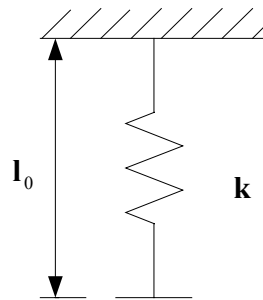


Fig. 1

自然長 l_0 [m], バネ定数 k のバネがあるとする。(Fig. 1 参照) 次の問いについて答えよ。

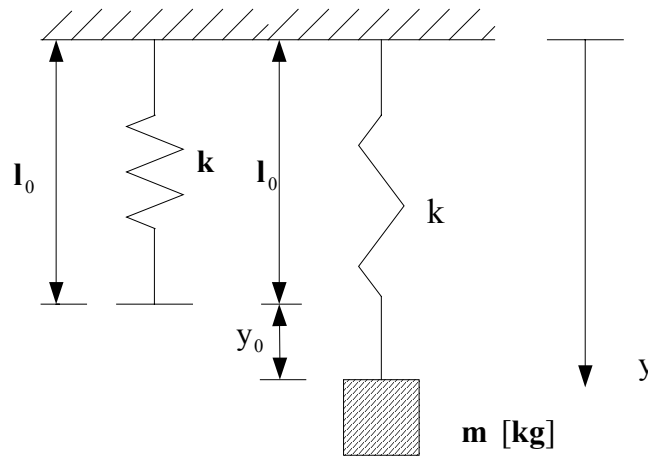


Fig. 2

問 1 重さ m [kg] の物体をバネに接続した場合, バネの伸びはどうなるか。(Fig. 2)

問 2 また, Fig. 3 の運動方程式を求めよ。

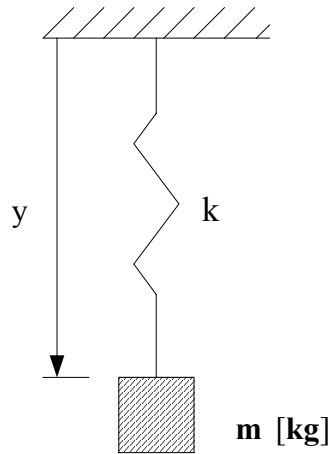


Fig. 3

解答

問 1

変位を y_0 [m] とすると、フックの法則より、

$$f = ky_0 \quad (1)$$

質量 m [kg] の物体にかかる重力加速度を g [m/s²] とすると、バネの伸びの式は次式となる.

$$ky_0 = mg$$

$$y_0 = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

問 2

質量 m [kg] の物体には、バネの復元力、重力の力が働く.

$$f_s = -k(y - l_0) \quad (3)$$

$$f_g = mg \quad (4)$$

よって、ニュートンの第二法則より、

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(y - l_0) + mg \quad (5)$$

となる.

【参考】

バネの復元力と重力が釣り合うと、 $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ であるから、

$$0 = -k(y_e - l_0) + mg \quad (6)$$

となる.

式(6)より次の式が成り立つ.

$$k(y_e - l_0) = mg$$

$$y_e = \frac{mg + kl_0}{k}$$

$$= \frac{mg}{k} + l_0 \quad [m] \quad (7)$$

ここで、

$$w = y - y_e \quad (8)$$

と定義する.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad (9)$$

よって, 式(5)に式(8), (9)を代入すると,

$$m \frac{d^2w}{dt^2} = -k(w + y_e - l_0) + mg \quad (10)$$

また, $ky_e = mg + kl_0$ であるから,

$$\begin{aligned} m \frac{d^2w}{dt^2} &= -kw - ky_e + kl_0 + mg \\ &= -kw - mg - kl_0 + kl_0 + mg \\ &= -kw \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)は変位 w に対する微分方程式となる.

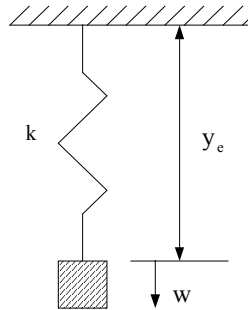


Fig. 4

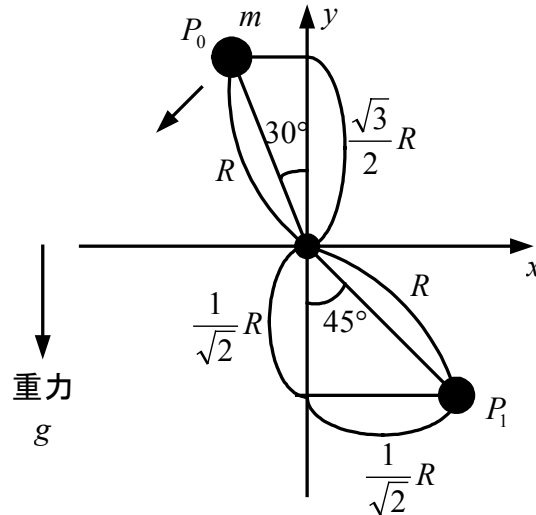


Fig. 1

問題

Fig. 1 に示すように、半径 R の棒の先端に質量 m の物体が装着されており P_0 で静止している。物体が P_0 から動きだし、 P_1 に達したとき、リンクから切り離すと物体はどのような運動をするか運動方程式を導出せよ。

解答

P_1 での速度の大きさは、エネルギー保存則で求める。 P_1 からみた P_0 の位置 (y 軸成分) は

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R \tag{1}$$

よって、位置エネルギー V は

$$\begin{aligned} V &= mg \left(\frac{1}{\sqrt{2}}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R \right) \\ &= mgR \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}mgR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

P_1 での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

式(2)と式(3)は等しいから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mgR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= gR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned} \tag{4}$$

また、 P_1 の座標 (x, y) を θ で表わすと

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = -R \cos \theta \end{cases} \tag{5}$$

速度の x, y 成分は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = R\dot{\theta}\cos\theta = v_x \\ \frac{dy}{dt} = R\dot{\theta}\sin\theta = v_y \end{cases} \quad (6)$$

速度は x と y 成分の合成より

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2\dot{\theta}^2 \quad (7)$$

よって, 式(4), (7)より

$$\begin{aligned} gR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= R^2\dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{g(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{R} \end{aligned} \quad (8)$$

題意より $\theta = 45^\circ$ で切り離すから, 式(6)に代入すると

$$\begin{cases} v_x = R\dot{\theta}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ v_y = R\dot{\theta}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (9)$$

となる.

式(8)より

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{g}\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{R}} \quad (10)$$

であるから, これを式(9)に代入すると

$$\begin{cases} v_x = \frac{\sqrt{Rg}\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ v_y = \frac{\sqrt{Rg}\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (11)$$

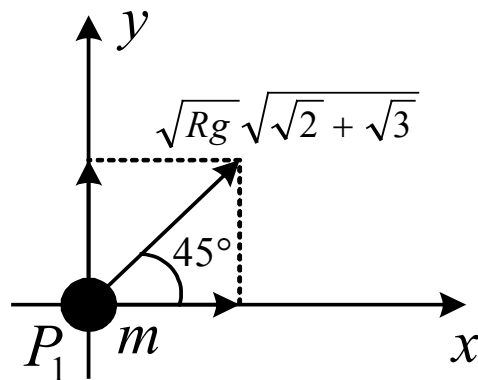


Fig. 2

点 P_1 を改めて原点と考えると Fig. 2 より

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases} \quad (13)$$

初期条件として

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_x(0) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_y(0) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

式(12)を積分すると

$$\left. \frac{dx}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

式(14)をさらに積分すると

$$\therefore x(t) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} t \quad (15)$$

式(13)を積分すると

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = -gt$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - gt \quad (16)$$

式(16)をさらに積分すると

$$y(t) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (17)$$

と求める。

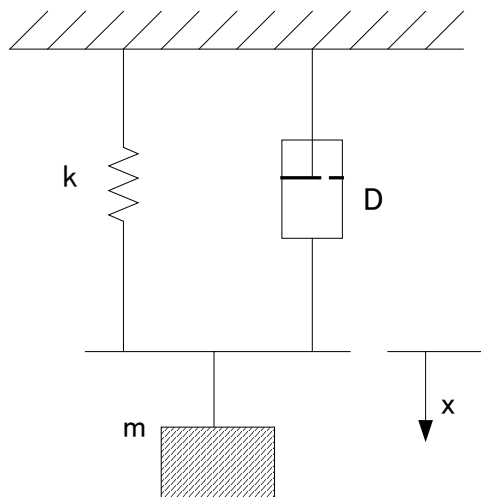


Fig. 1 バネ-マス-ダンパー系

問題

Fig. 1 に示すようにバネ，マス，ダンパー系がある．重力場にあり，平衡点で釣り合っているものとする．この時，平衡点からの変位を x とするとき，Fig. 1 の系に成立する微分方程式を求めよ．

解答

変位 x が生じると，各要素には次の力が生じる．

$$\text{バネ: } kx \quad \text{ダンパー: } D \frac{dx}{dt} \quad \text{マス: } m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

これらの合力が外力に等しいので，

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + kx = f \quad (2)$$

ここで f は外力である．

この問題において，外力はないので， $f = 0$ となる．

即ち，式(2)に代入して，

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3)$$

レポート 10

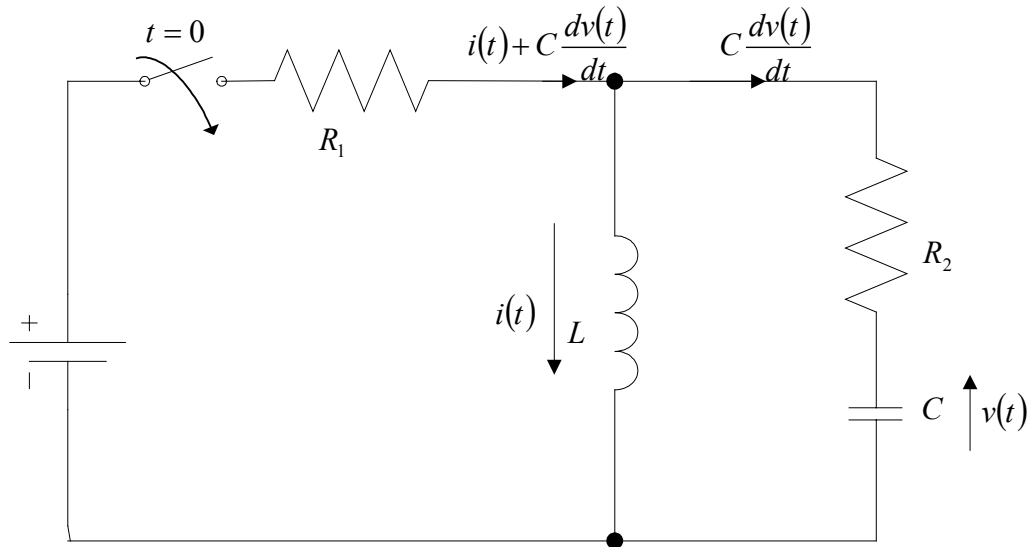


Fig. 1

問題

Fig. 1 に示す回路に対して回路方程式を求めよ. ただし, コイルの電流 $i(t)$ を, コンデンサの両端の電圧を $v(t)$ 用いて方程式を作れ.

解答

コンデンサの電圧 $v(t)$ と電荷 $q(t)$ の関係は

$$q(t) = Cv(t) \tag{1}$$

である.

コンデンサに流れる電流を $i_c(t)$ とすると

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} \tag{2}$$

となる.

よって, R_2 には $C \frac{dv(t)}{dt}$ なる電流が流れることになる.

また, R_1 には $i(t)$ と $C \frac{dv(t)}{dt}$ が流れる.

以上のことにより

$$R_1 \left(i(t) + C \frac{dv(t)}{dt} \right) + L \frac{di(t)}{dt} = E \tag{3}$$

$$R_2 C \frac{dv(t)}{dt} + v(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \tag{4}$$

となる.

【参考】

解を求める. ただし, $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ とする

式(3), (4)をラプラス変換すると

$$R_1 I(s) + LsI(s) + R_1 CsV(s) = \frac{E}{s} \quad (5)$$

$$R_2 CsV(s) + V(s) - LsI(s) = 0 \quad (6)$$

となる。式(4)と式(5)を行列形式で表記すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} R_1 + Ls & R_1 Cs \\ -Ls & R_2 Cs + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)より

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{s} & R_1 Cs \\ 0 & R_2 Cs + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Ls & R_1 Cs \\ -Ls & R_2 Cs + 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(R_2 Cs + 1) \frac{E}{s}}{(R_1 + Ls)(R_2 Cs + 1) + R_1 CLs^2} \\ &= \frac{(R_2 Cs + 1) \frac{E}{s}}{R_2 CLs^2 + R_1 CLs^2 + R_1 R_2 Cs + Ls + R_1} \\ &= \frac{(R_2 Cs + 1)E}{s \{ (R_1 + R_2) CLs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 \}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$V(s) = \frac{LE}{(R_1 + R_2) CLs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1} \quad (9)$$

式(8), (9)をラプラス逆変換すれば解が出るが, 繁雑となる。

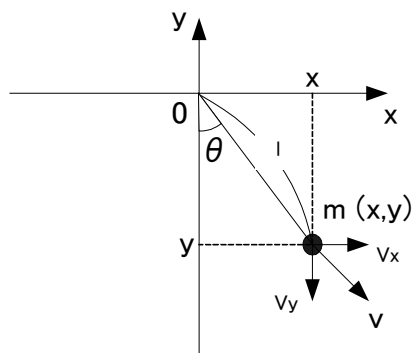


Fig. 1

問題

単振子の運動方程式を求めるのに、ラグランジュ運動方程式を用いて求めよ。

解答

Fig. 1 の力学系の運動エネルギー T (質量が移動する時に発生) は

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

物体 $m[\text{kg}]$ は座標 $[x, y]$ にあり、

$$x = x(t), y = y(t) \quad (2)$$

と考える。

ここで、速度 $v[\text{m/s}]$ を x 軸方向と y 軸方向に分割すると

x 軸方向の速度は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (3)$$

となり、 y 軸方向の速度は

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (4)$$

となる。従って、 v^2 は次式となる。

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (5)$$

ここで、 $x(t), y(t)$ を l と $\theta(t)$ を用いて表すと

$$x(t) = l \sin \theta(t) \quad (6)$$

$$y(t) = -l \cos \theta(t) \quad (7)$$

となる。

式(6)(7)を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = l \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = l \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \quad (9)$$

となる。

式(8)(9)を式(5)に代入すると

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\theta}^2(t) \quad (10)$$

式(10)を式(1)に代入すると

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2(t) \quad (11)$$

となる。式(11)は回転運動エネルギーである。

次に Fig. 1 の位置エネルギー U は原点を基準にし、求めると

$$U = mg(-l \cos \theta(t)) \quad (12)$$

となる。

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2(t) + mgl \cos \theta(t) \quad (13)$$

ここで、ラグランジュの運動方程式を記述すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} = F \quad (14)$$

また、問題では摩擦を考慮していない為、 $R = 0$ によって、

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (15)$$

また、外力は作用していないので

$$F = 0 \quad (16)$$

である。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}(t) \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta(t) \quad (18)$$

式(15)～(18)を式(14)に代入すると

$$ml^2 \ddot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = 0 \quad (19)$$

となる。 ($\because \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$)

式(19)を整理すると

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (20)$$

となる。

(注)式(20)に $\sin \theta(t)$ が存在している為、式(20)は非線形微分方程式となる。

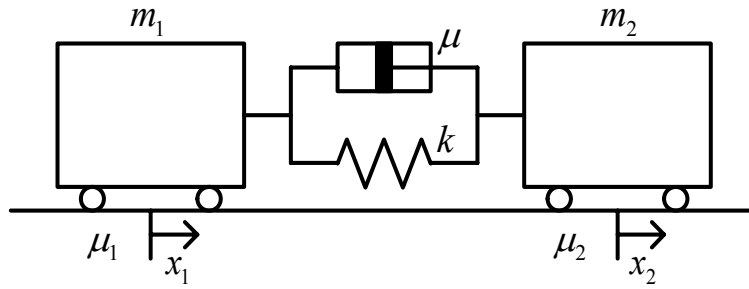


Fig. 1

問題

Fig. 1 のように 2 つの台車がバネとダンパーで結合されている。
運動方程式を求めよ。

解答

各台車の変位を $x_1(t), x_2(t)$ とする。(以下, x_1, x_2 とする)

ここで, m_1 の速度は $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, m_2 の速度は $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$ で表される。

運動方程式を求めるために Fig. 1 における運動エネルギー T を求める。

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (1)$$

位置エネルギー V は, バネに蓄積される。(変位の差に関係することに注意)

$$V = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \quad (2)$$

又, 消費エネルギー R は,

$$R = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{x}_2^2 \quad (3)$$

となる。

ここで, ラグランジュ関数 L は,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1^2 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \quad (4)$$

と求まる。

次に, ラグランジュの運動方程式は一般的に

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (5)$$

と表せる。

x_1 に対してラグランジュの運動方程式を求める。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad (6)$$

(外力 F は存在しないため, 0)

式(6)の各項の計算を行う。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2) \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_1 \dot{x}_1 \quad (9)$$

式(6)に式(7), (8), (9)を代入すると

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_1 \dot{x}_1 = 0 \quad (10)$$

式(10)をまとめると

$$m_1 \ddot{x}_1 + (\mu + \mu_1) \dot{x}_1 - \mu \dot{x}_2 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad (11)$$

次に, 同様にして x_2 に対してラグランジュの運動方程式を求める.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad (12)$$

(外力 F は存在しないため, 0)

式(6)の各項の計算を行う.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2) \quad (14)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = -\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_2 \dot{x}_2 \quad (15)$$

式(12)に式(13), (14), (15)を代入すると

$$m_2 \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_2 \dot{x}_2 = 0 \quad (16)$$

式(10)をまとめると

$$m_2 \ddot{x}_2 - \mu \dot{x}_1 + (\mu + \mu_2) \dot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \quad (17)$$

従って, Fig. 1 における運動方程式は式(11), (17)となる.

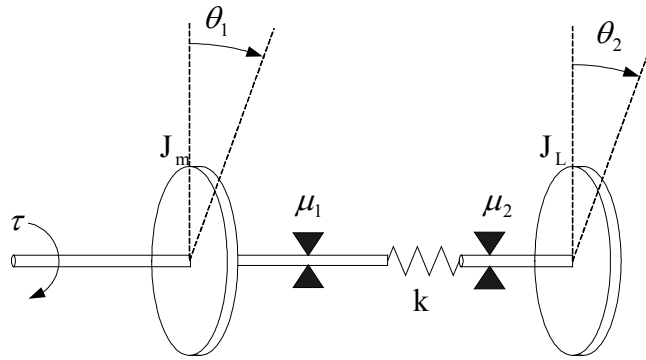


Fig. 1

問題

Fig. 1 に示すようなねじれを生じるシャフトで2つの慣性が結合されている。片側のシャフトには外部からのトルクが与えられているとする。この系の運動方程式を求めよ。

ただし、

θ_1, θ_2 : 角度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$: 角速度 J_m, J_L : 慣性モーメント μ_1, μ_2 : 粘性摩擦
 k : バネ定数 τ : トルク
 とする。

解答

この系の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_L \dot{\theta}_2^2 \tag{1}$$

位置エネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{2}$$

また、消費エネルギー R は

$$R = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{\theta}_1^2 \tag{3}$$

となる。式(1)、式(2)よりラグランジアン関数 L を求めると、

$$L = T - V = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_L \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{4}$$

となる。

式(3)、式(4)よりラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \tag{5}$$

を求める。

ただし、 q_i は一般化座標、 \dot{q}_i は一般化速度である。

(i) θ_1 について

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = J_m \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k\theta_1 + k\theta_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = \mu_1 \dot{\theta}_1, \quad F_1 = \tau \tag{6}$$

式(6)を式(5)に代入すると,

$$J_m \ddot{\theta}_1 + k\theta_1 - k\theta_2 + \mu_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (7)$$

(ii) θ_2 について

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = J_l \dot{\theta}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = k\theta_1 - k\theta_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = \mu_2 \dot{\theta}_2, \quad F_2 = 0 \quad (8)$$

式(8)を式(5)に代入すると,

$$J_l \ddot{\theta}_2 - k\theta_1 + k\theta_2 + \mu_2 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (9)$$

式(7), 式(9)をまとめると

$$J_m \ddot{\theta}_1 + \mu_1 \dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = \tau \quad (10)$$

$$J_l \ddot{\theta}_2 + \mu_2 \dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (11)$$

となる.



東海大学電子情報学部
コンピュータ応用工学科
コンピュータ制御研究室