東海大学紀要情報理工学部
Vol.9 , No.1 , 2009, pp. 1-10

VSS 適応制御器と共にセルフチューニング制御器を適用した回転型直列二重倒立振子の安定化制御

平田弘志 *1　　穴吹雅敏 *1

Stabilization Control for a Serial Rotary-Type Double Inverted Pendulum by Applying Self-Tuning Controller with VSS Adaptive Controller

by

Hiroshi Hirata *1 and Masatoshi ANABUKI *1

(Received on Mar.30, 2009 & accepted on Aug.31, 2009)

Abstract

Inverted pendulums are very often used to verify many control theories, because they are typical unstable systems and also are interesting objects. However, few approaches consider inverted pendulums as the object of adaptive control system. In this paper, authors propose a novel VSS (Variable Structure System) adaptive control system for a serial rotary-type double inverted pendulum whose whole basic parameters are unknown. The second pendulum is stabilized by tracking type's VSS adaptive control method on the assumption that the first pendulum is stable, and STC (Self-Tuning Control) system is simultaneously constructed in order to stabilize both of first pendulum and rotary arm. Then it is impossible to construct STC system by only adjustable parameters of VSS adaptive control system. Therefore whole basic parameters of nonlinear inverted pendulum system are estimated by using RLS (Recursive Least Squares) estimation method in order to achieve STC system, which updates LQ controller based on QR method devised for real time operation. Finally the validity of proposed method is illustrated by numerical simulations with appending the perturbation signal on an adaptive control system.

Keywords: double inverted pendulum, variable structure system adaptive control, self-tuning control, least squares adaptive law, Lyapunov function

１．　はじめに

倒立振子が制御の基本となっているものとして，身近なものでは２足歩行ロボット[1)]の静止状態での姿勢制御，立ち乗り電動車[2),3)]（Segway）の安定化制御などがある．また，倒立振子は典型的な不安定系であることから，各種の制御系設計法を検証する意味で従来から広く使用されている．このように倒立振子を応用した対象が存在し，倒立振子[4)]および二重倒立振子[5)]の検証例が数多く発表されているにもかかわらず，適応制御の検証例がほとんど見当たらない．その理由の一つとして，ロボットに代表されるような機械系のように各関節にアクチュエータのない倒立振子は機械系適応制御の手法が直接適用できないことが挙げられる．

非線形ロボットアームの適応制御法として，Slotine と Li により提案されたＶＳＳ型適応制御[6)]は対象に不確定性があっても良好な応答を与えるという実用的に優れた手法[7)]であることが知られている．この手法を倒立振子に応用した文献 8)は振子部分を確定系として扱っている．また，文献 9）では倒立振子系をパラメータ既知部分と未知部分に分割し，部分的適応制御を議論しているが，全てのパラメータを未知としたものではない．

著者らは最近，回転型倒立振子に対して安定性を保証した独自のＶＳＳ適応制御法を提案[10)]し，シミュレーションおよび実機実験によりその有効性を実証した．本研究では，さらに安定範囲が狭く制御が難しいとされる回転型二重倒立振子に対して，適応制御系を実現する．まず，第一振子の安定性を仮定して第二振子部に目標値追従型のＶＳＳ適応制御則を適用し安定系を構築する．また，同時に第一振子およびアーム部を安定化する目標角を生成するセルフチューニング制御系（ＳＴＣ）[11)]を構築する．このとき，ＶＳＳ適応制御で得られるパラメータのみではＳＴＣを構成するには不十分である．そのため，ＶＳＳ適応制御と併行して，二重倒立振子の基本パラメータを逐次推定する．この推定値から得られるシステム情報に基づき，Yamakita と Furuta 等[8)]のＬＱ最適制御をＱＲ法[12)]に基づく固有ベクトル法により逐次的に設計し，ＳＴＣを達成する．このように二つの適応則を導入して対象を安定化するのが特徴である．

さらに，基本パラメータ推定の結果として，新たに外乱に対してロバストなＶＳＳ適応制御則を提案する．そして，第二振子の安定化法として，σ-修正法[13),14)]に基づき得られるＶＳＳ適応則に対して，パルス性の摂動トルクを一定時間操作量に重畳させ，適応制御システムの外乱に対するロバスト性を検証する．このような摂動信号に対して振子とアームは共に大きく揺れることになるが，第二振子部分はＶＳＳ適応制御，他の部分

＊１　情報理工学部コンピュータ応用工学科　准教授

はＳＴＣ系により安定性が保証されるので，許容範囲内なら倒れることはない．以上の提案手法に対して，初期パラメータを未知とした適応制御シミュレーションを実施し，その有効性を確認した．

２．　制御対象

回転型直列二重倒立振子の簡略化した運動モデルを Fig.1 に示す．また，Fig.1 の制御対象の運動方程式は Euler-Lagrange 方程式を使用して次のように導出される．

$$M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}+C(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}+G(\boldsymbol{\theta})+B\dot{\boldsymbol{\theta}}+D(\dot{\boldsymbol{\theta}})=\boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

$\boldsymbol{\theta}$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$，$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ はそれぞれ角度，角速度，角加速度，$\boldsymbol{\tau}$ はトルクであり，$M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ は慣性項，$C(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}$ は遠心力およびコリオリ力などの非線形項，$G(\boldsymbol{\theta})$ は重力項，$B\dot{\boldsymbol{\theta}}$ は粘性摩擦項，$D(\dot{\boldsymbol{\theta}})$ はクーロン摩擦項である．

$$\begin{cases} M(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \tilde{m}_{13}\\ \tilde{m}_{12} & \tilde{m}_{22} & \tilde{m}_{23}\\ \tilde{m}_{13} & \tilde{m}_{23} & \tilde{m}_{33}\end{bmatrix}, \quad C(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{h}_2\\ \tilde{h}_3\end{bmatrix}, \\ G(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}0\\ \tilde{g}_2\\ \tilde{g}_3\end{bmatrix}, B\dot{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}b_1\dot{\theta}_1\\ b_2\dot{\theta}_2\\ b_3\dot{\theta}_3\end{bmatrix}, D(\dot{\boldsymbol{\theta}})=\begin{bmatrix}d_1\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)\\ d_2\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_2)\\ d_3\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_3)\end{bmatrix} \end{cases} \tag{2}$$

但し，　$\boldsymbol{\theta}^T:=[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]$，　$\boldsymbol{\tau}^T:=[\tau_1 \quad 0 \quad 0]$

$\tilde{m}_{11}:=J_1+J_2S_2{}^2+J_3S_{23}{}^2+2l_2r_2S_2S_{23}$，

$\tilde{m}_{12}:=-l_1r_1C_2-l_1r_2C_{23}$，　$\tilde{m}_{13}:=-l_1r_2C_{23}$，

$\tilde{m}_{22}:=J_2+J_3+2l_2r_2C_3$，　$\tilde{m}_{23}:=J_3+l_2r_2C_3$，$\tilde{m}_{33}:=J_3$，

$J_1:=I_1+m_1a_1{}^2+(m_2+m_3)l_1{}^2$，$J_2:=I_2+m_2a_2{}^2+m_3l_2{}^2$，

$J_3:=I_3+m_3a_3{}^2$，$r_1:=m_2a_2+m_3l_2$，$r_2:=m_3a_3$，

$\tilde{h}_1:=2J_2S_2C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+2J_3S_{23}C_{23}\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)+r_1l_1S_2\dot{\theta}_2{}^2$
$\quad +r_2(h_{11}+h_{12})$，

$\quad h_{11}:=2l_2(C_{23}S_{23}+S_2C_{23})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+2l_2S_2C_{23}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3$，

$\quad h_{12}:=l_1S_{23}(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)^2$，

$\tilde{h}_2:=-J_2S_2C_2\dot{\theta}_1{}^2-J_3S_{23}C_{23}\dot{\theta}_1{}^2-r_2l_2h_{21}$，

$\quad h_{21}:=2S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+S_3\dot{\theta}_3{}^2+C_2S_{23}\dot{\theta}_1{}^2+S_2C_{23}\dot{\theta}_1{}^2$，

$\tilde{h}_3:=-J_3S_{23}C_{23}\dot{\theta}_1{}^2-r_2l_2(S_2C_{23}\dot{\theta}_1{}^2-S_3\dot{\theta}_3{}^2)$，

$\tilde{g}_2:=-r_1gS_2-r_2gS_{23}$，　$\tilde{g}_3:=-r_2gS_{23}$，

$S_2:=\sin\theta_2$，　$C_2:=\cos\theta_2$，　$C_3:=\cos\theta_3$，

$S_{23}:=\sin(\theta_2+\theta_3)$，　$C_{23}:=cos(\theta_2+\theta_3)$．

ここで，g は重力加速度，τ_1 はモータからの入力トルクである．尚，振子部分の粘性摩擦係数 b_2,b_3 およびクーロン摩擦係数 d_2,d_3 は微小とみなし $b_2=b_3=0, d_2=d_3=0$ とする．

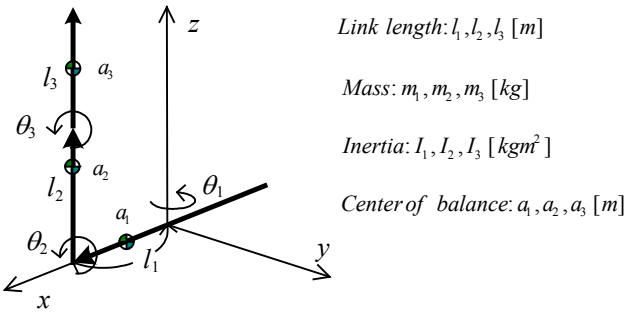


Fig. 1 Diagram of a serial rotary-type double inverted pendulum

３．　適応制御系設計

対象を分離して二種類の適応制御系を構築する．まず，第二振子に目標値追従型のＶＳＳ適応制御系を構築し，第二振子のスライディングモードを仮定する．また，第一振子およびアーム部の安定性を保証する目標角生成のためにＳＴＣを構築する．

3.1　第二振子の安定化

(1)式を平衡点近傍で線形化すると，運動方程式は次式となる．

$$\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{12} & m_{22} & m_{23}\\ m_{13} & m_{23} & m_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ g_2\theta_2+g_3\theta_3\\ g_3(\theta_2+\theta_3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\dot{\theta}_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_1\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_\tau i\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{3}$$

但し，　$m_{11}:=J_1$，　$m_{12}:=-l_1(r_1+r_2)$，　$m_{13}:=-l_1r_2$，
$m_{22}:=J_2+J_3+2l_2r_2$，　$m_{23}:=J_3+l_2r_2$，　$m_{33}:=J_3$，
$g_2:=-(r_1+r_2)g$，　$g_3:=-r_2g$．

ここで，k_τ はトルク定数，i はモータ電流で入力トルクを $\tau_1=k_\tau i$ としている．次に，第二振子角加速度 $\ddot{\theta}_3$ に関する方程式を求める．まず，(3)式の第一行要素式から次式

$$\ddot{\theta}_1=(-m_{12}\ddot{\theta}_2-m_{13}\ddot{\theta}_3-b_1\dot{\theta}_1-d_1\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)+k_\tau i)/m_{11} \tag{4}$$

が得られ，同じく第二行要素式と(4)式より $\ddot{\theta}_1$ を消去すると次式

$$\begin{aligned}(m_{11}m_{22}-m_{12}{}^2)\ddot{\theta}_2+(m_{11}m_{23}-m_{12}m_{13})\ddot{\theta}_3+m_{11}g_2\theta_2+m_{11}g_3\theta_3\\ -m_{12}b_1\dot{\theta}_1-m_{12}d_1\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)=-m_{12}k_\tau i\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．また，同じく第三行要素式と(4)式より $\ddot{\theta}_1$ を消去すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}(m_{11}m_{23}-m_{12}m_{13})\ddot{\theta}_2+(m_{11}m_{33}-m_{13}{}^2)\ddot{\theta}_3+m_{11}g_3\theta_2+m_{11}g_3\theta_3\\ -m_{13}b_1\dot{\theta}_1-m_{13}d_1\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)=-m_{13}k_\tau i\end{aligned} \tag{6}$$

さらに，(5)式と(6)式から $\ddot{\theta}_2$ を消去すると，次の第二振子角加速度 $\ddot{\theta}_3$ に関する振子系の方程式が導出される．

$$\begin{aligned}(\det M)\ddot{\theta}_3+(H_1g_3-H_3g_2)\theta_2+(H_1-H_3)g_3\theta_3\\ +H_4b_1\dot{\theta}_1+H_4d_1\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_1)=H_4k_\tau i\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\det M:=(H_1H_2-H_3{}^2)/m_{11}, \quad H_1:=m_{11}m_{22}-m_{12}{}^2\\ H_2:=m_{11}m_{33}-m_{13}{}^2, \quad H_3:=m_{11}m_{23}-m_{12}m_{13}\\ H_4:=m_{12}m_{23}-m_{13}m_{22}\end{cases}, \tag{8}$$

このとき，第一振子回転角度 θ_2 が平衡点近傍で安定であることを仮定して，第二振子の回転角度 θ_3 を安定化する設計を行う．まず，θ_3 に対し，その目標角度を r_f とし，その誤差 e を

$$e:=\theta_3-r_f \tag{9}$$

とする．また，参照速度 $\dot{\theta}_r$ および切換関数 s_c をそれぞれ次式

$$\dot{\theta}_r:=\dot{r}_f-he, \quad (h>0) \tag{10}$$

$$s_c:=\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_r=\dot{e}+he \tag{11}$$

で定義するとき，(7)式の対象は不確定外乱を考慮して以下のように表すことができる．

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha}+H\dot{s}_c=i+w\\ H:=(\det M)/H_4k_\tau\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\det M:=m_{11}m_{22}m_{33}-m_{22}m_{13}{}^2-m_{12}{}^2m_{33}\\ -m_{11}m_{23}{}^2+2m_{12}m_{13}m_{23}>0\end{aligned} \tag{13}$$

但し，w は等価外乱項，$\boldsymbol{Y}$ は計測値から構成されるベクトル，$\boldsymbol{\alpha}$ はパラメータベクトルである．ここでは，クーロン摩擦係数

d_1 を等価外乱項に含め，次式を使用するものとする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}^T = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_r & \theta_2 & \theta_3 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 := H, \quad \alpha_2 := (H_1 g_3 - H_3 g_2)/H_4 k_\tau \\ \alpha_3 := (H_1 - H_3) g_3 / H_4 k_\tau, \quad \alpha_4 := b_1 / k_\tau \end{cases} \tag{14}$$

$$\ddot{\theta}_r := \ddot{r}_f - h\dot{e} \tag{15}$$

以上の仮定の下で，次の命題１が得られる．

[命題１][14]　　ＶＳＳ適応制御の操作量及びパラメータ適応則をそれぞれ次式とする．

$$\begin{cases} i = \boldsymbol{Y}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v \operatorname{sgn}(s_c), \qquad (k_v > 0) \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_4 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{16}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{Y} s_c, \qquad (\boldsymbol{\Gamma} > 0) \tag{17}$$

ここで，k_v はＶＳＳゲインであり，Γ は適応則ゲインで対称行列とする．第一振子回転角度 θ_2 が平衡点近傍で安定とし，目標角 r_f が与えられるなら，(12)式の外乱 w に対し次式

$$k_v > |w| \tag{18}$$

の元で，$t \to \infty$ で $s_c \to 0$ となる．即ち，$e \to 0$ となり，第二振子角 θ_3 は目標角 r_f に追従する．

（証明）　いま，リアプノフ関数の候補として次の正値関数 V

$$V = H s_c^2 / 2 + (\boldsymbol{\varphi}^T \Gamma \boldsymbol{\varphi} / 2), \quad \boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{19}$$

を考えるとき，その時間微分 $\dot{V}$ は(12)式，(16)式により

$$\begin{aligned} \dot{V} &= H s_c \dot{s}_c + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \Gamma \boldsymbol{\varphi} / 2 + \boldsymbol{\varphi}^T \Gamma \dot{\boldsymbol{\varphi}} / 2 = s_c (i - \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\alpha} + w) + \boldsymbol{\varphi}^T \Gamma \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -k_v |s_c| + s_c w - s_c \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \Gamma \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -k_v |s_c| + s_c w - \boldsymbol{\varphi}^T \Gamma (\Gamma^{-1} \boldsymbol{Y}^T s_c - \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= -k_v |s_c| + s_c w \le -|s_c| (k_v - |w|) \end{aligned} \tag{20}$$

となる．したがって，(18)式により，$\dot{V} < 0 \ \ (s_c \ne 0)$ となる．　□

また，(16)式操作量の切換えによるチャタリングを防止する為に，符号関数 $\operatorname{sgn}(s_c)$ は次の飽和関数 $sat(s_c/\delta)$ で代用する．

$$sat(s_c/\delta) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(s_c) & |s_c| > \delta \\ s_c / \delta & |s_c| \le \delta \end{cases} \tag{21}$$

3.2　ＳＴＣ設計

ＶＳＳ系の滑り状態への到達時間は短く，制御開始時点において θ_2 が平衡点近傍にあれば，速やかに滑り状態 $\theta_3 \cong r_f$ が達成できる．したがって，命題１により振子２を安定域に拘束した状態で基本パラメータを推定し，第一振子とアームを安定化する意味の目標角度を生成するＳＴＣ系を構築する．

［二重倒立振子系の基本パラメータ］　(1), (2)式の記述では，運動データから直接的に推定するのは困難である．そこで，基本パラメータを使用して運動方程式を記述する．(1), (2)式より慣性項, 非線形項, 重力項, 摩擦項はそれぞれ基本パラメータ ζ_i を用いて次式

$$\begin{cases} M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k M_k(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k \left(\frac{d}{dt} M_k(\boldsymbol{\theta}) \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \sum_{k=1}^{p} \zeta_k \{ \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} M_k(\boldsymbol{\theta}) \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} \} \\ G(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k P_k(\boldsymbol{\theta}), \quad (p = 5) \\ B\dot{\boldsymbol{\theta}} + D(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{k=p+1}^{p+n} \zeta_k B_k \dot{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{k=p+n+1}^{p+2n} \zeta_k D_k, \quad (n = 3) \end{cases} \tag{22}$$

但し，　$\zeta_1 = J_1$，　$\zeta_2 = J_2$，　$\zeta_3 = J_3$，　$\zeta_4 = r_1$，　$\zeta_5 = r_2$

$$M_1(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_4(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 C_2 & 0 \\ -l_1 C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_5(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 2 l_2 S_2 S_{23} & -l_1 C_{23} & -l_1 C_{23} \\ -l_1 C_{23} & 2 l_2 C_3 & l_2 C_3 \\ -l_1 C_{23} & l_2 C_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$P_1(\boldsymbol{\theta}) = P_2(\boldsymbol{\theta}) = P_3(\boldsymbol{\theta}) = 0, P_4(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g S_2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g S_{23} \\ -g S_{23} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

のように表される．また，摩擦項は２章の仮定より無視できるものが多いので，基本パラメータ数を減らした次式

$$B\dot{\boldsymbol{\theta}} + D(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \zeta_6 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \zeta_7 \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \zeta_6 = b_1, \qquad \zeta_7 = d_1 \tag{25}$$

で記述する．このとき，基本パラメータに関する線形関係式は次式で表される．

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + G(\boldsymbol{\theta}) + B\dot{\boldsymbol{\theta}} + D(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \Phi^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\zeta} \tag{26}$$

$$\Phi^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) := \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \dot{\theta}_1 & \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ 0 & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} & 0 & \phi_{35} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

但し，$\phi_{12} := S_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2 S_2 C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$，$\phi_{13} := S_{23}^2 \ddot{\theta}_1 + 2 S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$，

$$\begin{aligned} &\phi_{14} = -l_1 C_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 S_2 \dot{\theta}_2^2, \quad \phi_{23} := \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 - S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1^2, \\ &\phi_{15} := 2 l_2 S_2 S_{23} \ddot{\theta}_1 - l_1 C_{23} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + h_{11} + h_{12}, \\ &\phi_{22} := \ddot{\theta}_2 - S_2 C_2 \dot{\theta}_1^2, \quad \phi_{24} = -l_1 C_2 \ddot{\theta}_1 - g S_2, \\ &\phi_{25} := -l_1 C_{23} \ddot{\theta}_1 + l_2 C_3 (2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - l_2 S_3 \dot{\theta}_3 (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &\qquad - l_2 (C_2 S_{23} + S_2 C_{23}) \dot{\theta}_1^2 - g S_{23}, \quad \phi_{33} := \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 - S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1^2 \\ &\phi_{35} := -l_1 C_{23} \ddot{\theta}_1 + l_2 (C_3 \ddot{\theta}_2 - S_2 C_{23} \dot{\theta}_1^2 + S_3 \dot{\theta}_2^2) - g S_{23}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}^T &:= \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_6 & \zeta_7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & r_1 & r_2 & b_1 & d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

ここで，$\Phi(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}})$ は regressor 行列，$\boldsymbol{\zeta}$ は基本パラメータベクトルである．　また，モータトルク定数 k_τ が不確定な場合を考慮して，(26)式を変形し，次式のようにして使用する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \Phi^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{i}^T := \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}^T := \boldsymbol{\zeta}^T / k_\tau = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_7 \end{bmatrix} \\ \sigma_1 := J_1 / k_\tau, \quad \sigma_2 := J_2 / k_\tau, \quad \sigma_3 := J_3 / k_\tau, \\ \sigma_4 := r_1 / k_\tau, \quad \sigma_5 := r_2 / k_\tau, \quad \sigma_6 := b_1 / k_\tau, \quad \sigma_7 := d_1 / k_\tau \end{cases} \tag{29}$$

また，推定モデルは次式であり

$$\boldsymbol{v}(k) = \Phi^T(k) \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k), \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T(k) := \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1(k) & \hat{\sigma}_2(k) & \cdots & \hat{\sigma}_7(k) \end{bmatrix} \tag{30}$$

$\Phi(k)$ は(27)式の行列 $\Phi(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}})$ の k 時刻を表す．いま，計測値はモータ電流 i と各回転角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のみである．また，推定に必要な運動データ $\Lambda = \{i(k), \boldsymbol{\theta}(k), \dot{\boldsymbol{\theta}}(k), \ddot{\boldsymbol{\theta}}(k)\}$ の角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}(k)$ と角加速度 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}(k)$ は次のディジタル信号処理によって求められる．

$$\begin{cases} i_a = G_0 i, \quad \theta_a = G_0 \theta, \quad \dot{\theta}_a = G_1 \theta, \quad \ddot{\theta}_a = G_2 \theta \\ \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_a) = G_0 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \qquad \dot{\theta} := \{\theta(k) - \theta(k-1)\} / T \\ G_1 := s G_0, \quad G_2 := s^2 G_0, \quad T : sampling\ period. \\ G_0 := 1 / (1 + \tau_f s)^3, \quad s = C_T (z-1)/(z+1), \quad C_T = 2/T \end{cases} \tag{31}$$

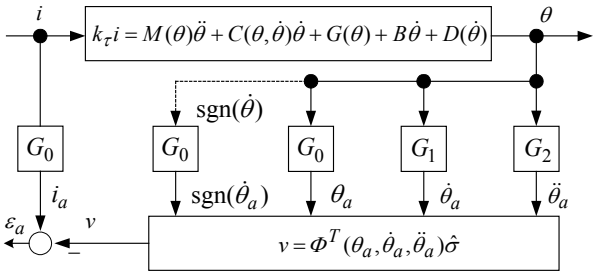


Fig. 2 Signal processing system for the motion data

さらに，センサ特性の違いによる推定精度の劣化を補償した信号処理系[15),16)]を Fig.2 に示す．

［基本パラメータ逐次推定］　逐次推定は制御周期毎に(31)式から得られる運動データ $\Lambda_a = \{i_a(k), \boldsymbol{\theta}_a(k), \dot{\boldsymbol{\theta}}_a(k), \ddot{\boldsymbol{\theta}}_a(k)\}$ を用いて実施される．パラメータ推定則は幾つか考えられるが，観測ノイズの影響は比較的小さいと考えられるので，ここでは(30)式の推定モデルに対して，次の最小２乗形一般化適応則[17)]を用いることにより推定値 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$ を得ている．

【 最小２乗形一般化適応則 】　パラメータ誤差 $\boldsymbol{\eta}(k)$ が

$$\boldsymbol{\eta}(k) := \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k) \tag{32}$$

によって定義され，応答の誤差式 $\boldsymbol{\varepsilon}_a(k)$ が

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(k) := \boldsymbol{i}_a(k) - \Phi^T(k)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k) = \Phi^T(k)\boldsymbol{\eta}(k) \tag{33}$$

であるとき，推定パラメータ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$ が次の適応則

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k-1) - \rho(k)\boldsymbol{F}(k-1)\Phi(k)\boldsymbol{\varepsilon}_a(k) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}(k) = \lambda_1(k)\boldsymbol{F}^{-1}(k-1) + \lambda_2(k)\Phi(k)\Phi^T(k) \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} 0 < \boldsymbol{F}(0), & 0 < \boldsymbol{F}^{-1}(0) \\ 0 < \lambda_1(k) \le 1, & 0 < \lambda_2(k), \quad \rho(k) := \lambda_2(k)/\lambda_1(k) \end{bmatrix} \tag{36}$$

により調整されるならば $\Phi(k)$ の有界，非有界にかかわらず，$\boldsymbol{\varepsilon}_a(k) \to \boldsymbol{0}$, ($k \to \infty$)が保証される．　□

また，この適応則による基本パラメータ $\boldsymbol{\sigma}$ の推定において，(27)式の $\Phi(k)$ が PE 性(Persistency of Excitation)の条件を満たすとき，パラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$ は指数収束し，一致推定値[17)]となる．実際，適応則において $\lambda_1(k) = \lambda(k)$, $\lambda_2(k) = 1$ とした次の重み付最小２乗適応則にして実施している．

***Parameter adjusting*:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k-1) - \boldsymbol{F}(k-1)\Phi(k)\boldsymbol{\varepsilon}_a(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a(k) = \boldsymbol{\varepsilon}_p(k) \big/ \{\lambda(k) + tr[\Phi^T(k)\boldsymbol{F}(k-1)\Phi(k)]\} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p(k) := \boldsymbol{i}_a(k) - \Phi^T(k)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1) \end{cases} \tag{37}$$

***Adaptive gain*:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}(k) = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(k)\Phi^T(k)\right]\boldsymbol{F}(k-1)/\lambda(k) \\ \boldsymbol{A}(k) := \boldsymbol{F}(k-1)\Phi(k) \big/ \{\lambda(k) + tr\,[\Phi^T(k)\boldsymbol{F}(k-1)\Phi(k)]\} \end{cases} \tag{38}$$

$$\lambda(k) := \mu\lambda(k-1) + (1-\mu), \quad 0.98 < \lambda(0) \le 1 \tag{39}$$

また，(39)式の重み $\lambda(k)$ の計算では，定数 $\mu = 0.99$ とした．

［第一振子とアームを安定化する目標角度の生成］　(3)式の第二行要素式と第三行要素式から $\ddot{\theta}_2$ を消去すると次式

$$H_4\ddot{\theta}_1 = (m_{22}m_{33} - m_{23}{}^2)\ddot{\theta}_3 + (m_{22}g_3 - m_{23}g_2)\theta_2 + (m_{22} - m_{23})g_3\theta_3 \tag{40}$$

が得られる．また，同じく(3)式の第二行要素式と第三行要素式から $\ddot{\theta}_1$ を消去すると次式が得られる．

$$H_4\ddot{\theta}_2 = (m_{13}m_{23} - m_{12}m_{33})\ddot{\theta}_3 + (m_{13}g_2 - m_{12}g_3)\theta_2 + (m_{13} - m_{12})g_3\theta_3 \tag{41}$$

このとき，$m_{13}g_2 - m_{12}g_3 = 0$ に留意する．また，第二振子制御系がスライディングモードであるなら，命題１より振子角度 θ_3 は目標角度に追従($e = 0$)する．すなわち，$\theta_3 = r_f$ とみなして，θ_3 を r_f で置換えると両式は

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \rho_1\theta_2 + \rho_2 r_f + \rho_3 \ddot{r}_f \\ \ddot{\theta}_2 = \rho_4 r_f + \rho_5 \ddot{r}_f \end{cases} \tag{42}$$

但し，$\rho_1 := (m_{22}g_3 - m_{23}g_2)/H_4$ ，$\rho_2 := (m_{22} - m_{23})g_3/H_4$
$\rho_3 := (m_{22}m_{33} - m_{23}{}^2)/H_4$ ，$\rho_4 := (m_{13} - m_{12})g_3/H_4$
$\rho_5 := (m_{13}m_{23} - m_{12}m_{33})/H_4$.　(43)

と記述できる．(42)式の未知パラメータ系の制御方策として，基本パラメータ σ_i を逐次推定しながら制御器を調整するＳＴＣを実施する．このとき，(14)式のＶＳＳ制御系のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ では(42)式の係数 $\rho_i(i = 1,\cdots,5)$ を表現することは困難であるが，基本パラメータ推定値 $\hat{\sigma}_i(k)$ を用いると表現可能となる．また，安定化制御器設計にＬＱ制御を使用するために(42)式を推定値 $\hat{\sigma}_i(k)$ 記述の状態方程式で表すと次式となる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{r}_f \\ \ddot{r}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ r_f \\ \dot{r}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_3 \\ 0 \\ \rho_5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{r}_f \tag{44}$$

但し，$\rho_1 := -g/l_1$ ，$\rho_2 := -\{\hat{\sigma}_2(k) + l_2\hat{\sigma}_5(k)\}\hat{\sigma}_5(k)g/d_n$
$\rho_3 := \{\hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_3(k) - l_2{}^2\hat{\sigma}_5{}^2(k)\}/d_n$ ，$\rho_4 := -l_1 g\hat{\sigma}_4(k)\hat{\sigma}_5(k)/d_n$
$\rho_5 := \{l_1\hat{\sigma}_3(k)\hat{\sigma}_4(k) - l_2\hat{\sigma}_5{}^2(k)\}/d_n$,
$d_n := l_1\{\hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_3(k)\hat{\sigma}_4(k)\} + l_1 l_2\hat{\sigma}_5(k)\{\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_4(k)\}$.　(45)

第二振子の目標角加速度 $\ddot{r}_f$ を制御入力と考えた(44)式のシステムにおいて，次の評価関数 J

$$\begin{cases} J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{x} + \ddot{r}_f{}^T R\,\ddot{r}_f)\,dt, \quad (\boldsymbol{Q} \ge 0,\ R > 0) \\ \boldsymbol{x}^T := [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad r_f \quad \dot{r}_f] \end{cases} \tag{46}$$

を最小にするような以下のフィードバックゲイン $\boldsymbol{F}_o$ を制御周期毎に更新する．

$$\ddot{r}_f = -\boldsymbol{F}_o{}^T\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{F}_o{}^T := [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] \tag{47}$$

本研究では，(44)式からハミルトン行列を構成し，ＱＲ法（ダブルＱＲ法を含む）により固有値を求めリカッチ解を得る固有ベクトル法を採用している．また，文献 12)に基づきＱＲ法の収束を加速する原点移動法および繰返し計算の収束判定部分などを工夫して，実時間処理に適した形に独自開発している．

(3)式で記述される制御対象に対して，(16)式の定常到達則[18)]を使用する場合，ＶＳＳ系の滑り状態への到達時間は極めて短い．したがって，第一振子角度 θ_2 が平衡点近傍にあれば（通常，制御開始時点において適切な初期角度であれば満足される），即座に滑り状態（スライディングモード） $\theta_3 \cong r_f$ が達成される．また，ＳＴＣ系は推定パラメータ $\hat{\sigma}_i(k)$ の収束が完了していなくても，(44)式の系に対し常に安定性を保証する $\boldsymbol{F}_o$ が制御周期毎に更新される．ゆえに，(46)式の状態変数は漸近安定となると考えられる．以上の理由により，命題１の仮定が満足され，ＶＳＳ系とＳＴＣ系の相補効果による適応制御系が達成される．

４．　ロバスト性を向上させた適応制御系

前章で述べた命題１のＶＳＳ適応則は外乱に対してロバスト性が低いことが指摘[10]されている．そこで，本章では外乱に耐えられるような２つのロバスト適応則を示す．最初に σ -修正法[13]を応用した適応則［命題２］を示す．

[命題２]　ＶＳＳ適応制御の操作量及びパラメータ適応則をそれぞれ次式とする．

$$\begin{cases} i = \boldsymbol{Y}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v\, sat(s_c/\delta), & (k_v > 0) \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T := \begin{bmatrix}\hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_4\end{bmatrix} \end{cases} \tag{48}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = -k_a\,\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{Y}\,s_c, \qquad (k_a > 0,\ \ \boldsymbol{\Gamma} > 0) \tag{49}$$

ここで，k_v はＶＳＳゲイン，k_a はパラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ のゲイン，Γ は適応則ゲインで対称行列とする．第一振子回転角度 θ_2 が平衡点近傍で安定とし，目標角 r_f が与えられるなら，(12)式のシステム外乱に対し次の条件

$|s_c| > \delta$ のとき，　$|w| < k_v + k_a\{\|\hat{\boldsymbol{\alpha}}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma) - \boldsymbol{\alpha}^T\Gamma\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}/\delta$　(50)

$|s_c| \le \delta$ のとき，　$|w| < k_a\{\|\hat{\boldsymbol{\alpha}}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma) - \boldsymbol{\alpha}^T\Gamma\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}/\delta$　(51)

の元で，$t \to \infty$ で $s_c \to 0$　即ち，$e \to 0$ となり，第二振子角 θ_3 は目標角 r_f に追従する．　□

命題１・命題２のＶＳＳ適応則の $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は真値への収束を重視していないことが判明している[10]．通常，(49)式の $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は小さな値で推移する為，右辺第二項が支配的である．切換関数 s_c が境界層 δ の外に出るような摂動信号を重畳した場合，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ が急激に増大し，操作信号が過大となり摂動信号に耐えられなくなることがある．$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ が真値に近い推移となれば，第一項の効果が期待でき，操作量の急激な増大を抑えられる．そこで，収束がより確実な基本パラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$ を用いて調整則を修正し，この問題点を改善する．以下に二種類の適応機構を使用する利点を活かした適応則を示す．

[定理１]　(52)式のＶＳＳ適応制御の操作量に対し，パラメータ適応則を(53),(54)式とする．また，(54)式のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ は初期値を $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ とし，基本パラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$ を用いて(55)式により与えられるものとする．また，$d_n \ne 0$ とする．

$$\begin{cases} i = \boldsymbol{Y}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v\, sat(s_c/\delta), & (k_v > 0) \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T := \begin{bmatrix}\hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_4\end{bmatrix} \end{cases} \tag{52}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = k_a\,\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{Y}\,s_c, \qquad (k_a > 0,\ \ \boldsymbol{\Gamma} > 0) \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^T &:= \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}p_1/d_n & p_2/d_n & p_3/d_n & p_4\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

但し，
$$\begin{aligned} p_1 &:= \hat{\sigma}_1(k)\hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_3(k) - l_2^{\,2}\hat{\sigma}_1(k)\hat{\sigma}_5(k)^2 \\ &\quad - l_1^{\,2}\{\hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_5(k)^2 + \hat{\sigma}_3(k)\hat{\sigma}_4(k)^2 - 2l_2\hat{\sigma}_4(k)\hat{\sigma}_5(k)^2\}, \\ p_2 &:= [\hat{\sigma}_3(k)\hat{\sigma}_4(k) - \hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_5(k) \\ &\quad + l_2\hat{\sigma}_5(k)\{\hat{\sigma}_4(k) - \hat{\sigma}_5(k)\}]\hat{\sigma}_1(k)g, \\ p_3 &:= [l_1^{\,2}\hat{\sigma}_4(k)\{\hat{\sigma}_4(k) + \hat{\sigma}_5(k)\} - \hat{\sigma}_1(k)\hat{\sigma}_2(k)]\hat{\sigma}_5(k)g, \\ p_4 &:= \hat{\sigma}_6(k), \\ d_n &:= l_1\{\hat{\sigma}_2(k)\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_3(k)\hat{\sigma}_4(k)\} \\ &\quad + l_1 l_2\hat{\sigma}_5(k)\{\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_4(k)\}. \end{aligned}$$

ここで，k_v はＶＳＳゲイン，k_a はパラメータ誤差 φ のゲイン，Γ は適応則ゲインで対称行列とする．第一振子回転角度 θ_2 が平衡点近傍で安定とし，目標角 r_f が与えられるなら，(12)式の外乱に対し次の条件

$|s_c| > \delta$ のとき，　$|w| < k_v + k_a\|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma)/\delta$　(56)

$|s_c| \le \delta$ のとき，　$|w| < k_a\|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma)/\delta$　(57)

の元で，$t \to \infty$ で $s_c \to 0$　即ち，$e \to 0$ となり，第二振子角 θ_3 は目標角 r_f に追従する．

(証明)　まず，切換関数 s_c が境界層外にある $|s_c| > \delta$ では $sat(s_c/\delta) = \mathrm{sgn}(s_c)$ ゆえ操作量は次式

$$i = \boldsymbol{Y}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v\,\mathrm{sgn}(s_c), \qquad (k_v > 0) \tag{58}$$

である．いま，リアプノフ関数の候補として(19)式の正値関数 V を考えるとき，命題１の場合と同様にその時間微分 $\dot{V}$ は(12)式，(58)式により

$$\dot{V} = -k_v|s_c| + s_c w - \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma(\Gamma^{-1}\boldsymbol{Y}s_c + \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) \tag{59}$$

となる．(59)式に(53)式を代入すると次式のように整理される．

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_v|s_c| + s_c w - \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma(\Gamma^{-1}\boldsymbol{Y}s_c + k_a\boldsymbol{\varphi} - \Gamma^{-1}\boldsymbol{Y}s_c) \\ &\le -|s_c|(k_v - |w|) - k_a\boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi} \\ &\le \delta(|w| - k_v - k_a\|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma)/\delta) \end{aligned} \tag{60}$$

$$\because\quad \|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma) \le \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi} \le \|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\max}(\Gamma) \tag{61}$$

(56)式により $\dot{V} < 0$　$(s_c \ne 0)$ となる．ゆえに，誤差システムは境界層 δ 内へと導かれる．また，$|s_c| \le \delta$ では操作量は次式

$$i = \boldsymbol{Y}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v\,s_c/\delta, \qquad (k_v > 0) \tag{62}$$

であり，正値関数 V の時間微分 $\dot{V}$ は(62)式により

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Hs_c\dot{s}_c + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi}/2 + \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}}/2 \\ &= s_c(i - \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha} + w) + \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= s_c[-k_v\,s_c/\delta - \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\varphi} + w] + \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -k_v\,s_c^{\,2}/\delta + s_c w - s_c\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -k_v|s_c|^2/\delta + s_c w - \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma(\Gamma^{-1}\boldsymbol{Y}s_c - \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= -k_v|s_c|^2/\delta + s_c w - \boldsymbol{\varphi}^T\Gamma(\Gamma^{-1}\boldsymbol{Y}s_c + \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) \end{aligned} \tag{63}$$

となる．さらに，(63)式に(53)式を代入すると次式

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -|s_c|(k_v|s_c|/\delta - |w|) - k_a\boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi} \\ &\le |s_c|\cdot|w| - k_a\boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi} \le \delta|w| - k_a\boldsymbol{\varphi}^T\Gamma\boldsymbol{\varphi} \\ &\le \delta|w| - k_a\|\boldsymbol{\varphi}\|^2\,\lambda_{\min}(\Gamma) \end{aligned} \tag{64}$$

となり，(57)式より $\dot{V} < 0$　$(s_c \ne 0)$ となる．

次に，(54)式のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ の要素 α_i について，基本パラメータ σ_i による記述を示す．まず，α_1 は(12), (14)式より

$$\alpha_1 := (\det M)/H_4\,k_\tau \tag{65}$$

であり，$\det M$ および H_4 は(3)式と(8)式より，それぞれ次式

$$\det M := J_1J_2J_3 - l_2^{\,2}r_2^{\,2}J_1 - l_1^{\,2}(r_2^{\,2}J_2 + r_1^{\,2}J_3 - 2l_2r_1r_2^{\,2}) \tag{66}$$

$$H_4 := l_1(r_2J_2 - r_1J_3 - l_2r_1r_2 + l_2r_2^{\,2}) \tag{67}$$

となる．さらに，(29)式の基本パラメータ σ_i で記述すると

$$\begin{aligned} \det M &:= k_\tau^{\,3}\{\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - l_2^{\,2}\sigma_1\sigma_5^{\,2} \\ &\quad - l_1^{\,2}(\sigma_2\sigma_5^{\,2} + \sigma_3\sigma_4^{\,2} - 2l_2\sigma_4\sigma_5^{\,2})\} \end{aligned} \tag{68}$$

$$H_4 = l_1k_\tau^{\,2}(\sigma_2\sigma_5 - \sigma_3\sigma_4 - l_2\sigma_4\sigma_5 + l_2\sigma_5^{\,2}) \tag{69}$$

となり，(65)式により

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \{\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - l_2^{\,2}\sigma_1\sigma_5^{\,2} - l_1^{\,2}(\sigma_2\sigma_5^{\,2} + \sigma_3\sigma_4^{\,2} - 2l_2\sigma_4\sigma_5^{\,2})\}/d_n \\ &\because\ d_n := l_1\{\sigma_2\sigma_5 - \sigma_3\sigma_4\} + l_1l_2\sigma_5(\sigma_5 - \sigma_4)\} \end{aligned} \tag{70}$$

となる．したがって，σ_i を推定値 $\hat{\sigma}_i(k)$ で置換えると(55)式の α_1 となる．以下同様にして $\alpha_2 \sim \alpha_4$ が求まる．　□

[定理１]の(53)式では，$\boldsymbol{\varphi}$ の構成に基本パラメータ推定値 $\hat{\sigma}(k)$ を使用している為，PE 性を満たせば $\hat{\sigma}(k)$ は一致推定値となるので，(49)式と異なり $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の真値に近い値となる．それゆえ，s_c が境界層 δ の外に出るような場合でも(52)式の右辺 $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は適正値に近く，(49)式の適応則と比較して操作信号が過

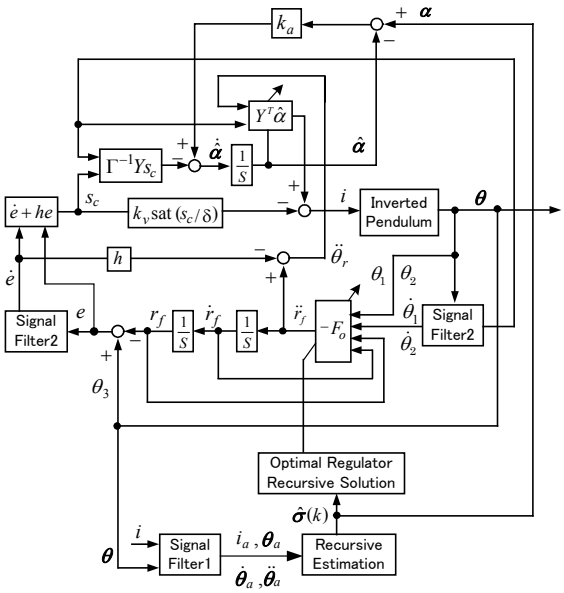


Fig. 3　Block diagram of VSS adaptive control system

大とならず，よりロバストであることに留意する．Fig.3 は本研究で提案する適応制御系のブロック線図を示している．Fig.3 の Signal Filter1 は(31)式で示した各ディジタルフィルタである．また，Signal Filter2 はその出力が制御に必要な変数なので，遅れ時間の少ない次の１次擬似微分フィルタである．

$$G_0 := s/(1+\tau_v s) \tag{73}$$

５．　適応制御シミュレーション

提案法を検証する為に C^{++} 言語および GLUT ライブラリ [19] を使用した３Ｄビジュアル機能を組込んだリアルタイム性の高いシミュレーションソフトを開発した．開発ソフトには３Ｄ表示とシミュレーション結果のグラフ表示機能を持たせている．また，Fig.1 に示した回転型二重倒立振子の運動パラメータおよび基本パラメータをそれぞれ Table 1 と Table 2 に示す．さらに，Table 3 には適応制御シミュレーションで共通に使用した諸定数を示す．制御対象は(1),(2)式の非線形方程式をルンゲクッタ４次，刻み時間 0.5[msec]で数値計算している．さらに，Fig.4 はその３Ｄイメージを示したものとなっている．

最初のシミュレーションでは回転アーム部のクーロン摩擦係数を小さく $d_1 = 1e-4$ と選定したとき，どの適応則を使用しても大差のない安定な制御結果となることが確認された．ここでは，定理１を使用し，初期角として振子１に 1[deg]，振子２に 0.3[deg]を与えたときの結果を Fig.5 に示す．

Table 1　Motion parameters of DIP (double inverted pendulum)

Rotary arm	$l_1 = 0.16$	$m_1 = 0.56$	$a_1 = 0.08$	$I_1 = 4.895$ e-3
Pendulum 1	$l_2 = 0.10$	$m_2 = 0.18$	$a_2 = 0.08$	$I_2 = 1.981$ e-3
Pendulum 2	$l_3 = 0.30$	$m_3 = 0.045$	$a_3 = 0.15$	$I_3 = 1.350$ e-3

Table 2　Basic parameters of DIP

J_1	J_2	J_3	r_1	r_2	b_1	d_1
1.424e-2	3.583e-3	2.363e-3	1.890e-2	6.750e-3	2.500e-3	1.0e-4 / 1.351e-1

Table 3　Condition for adaptive control simulation of DIP

motor torque constant : k_τ $[Nm/A]$	$k_\tau = 0.3185$
coefficient in switching function : h	$h = 20$
VSS scalar gain in control input : k_v	$k_v = 2.0$
VSS adaptive gain : $\Gamma = \gamma I$	$\gamma = 10$
boundary layer in saturation function : δ	$\delta = 0.1$
filter constant for estimation system: τ_f [sec]	$\tau_f = 0.04$
filter constant for control system: τ_v [sec]	$\tau_v = 0.01$
sampling period : T [sec]	$T = 0.002$
VSS adaptive gain of φ: k_a	$k_a = 10$
weight of J : $Q = diag(10^2, 10^2, 10, 10, 10, 10)$, $R = 10^2$	

Fig.5(a)～(d)は二重倒立振子の運動データであり，最初の 0.2 秒間に発生する小さな振動はＶＳＳ系が到達モードであることを示し，その後滑り状態では微小な操作量となりＳＴＣ系は 4[sec]程度で整定している．Fig.5(c),(d)では初期角が大きい為，除外している．また，Fig.5(d)では目標角も併せて示している．Fig.5(e),(f)はそれぞれ推定された基本パラメータとＳＴＣ構成に必要な(45)式のパラメータ ρ_i の推移である．さらに，Fig.5(g)はＬＱ制御のフィードバックゲイン $\boldsymbol{F}_o$ である．各パラメータ推移の過渡的な部分においても，$\boldsymbol{F}_o$ の収束は迅速で 0.2[sec]程度でほぼ確定している．即ち，非線形系の基本パラメータ推定値に偏りが見られるものの線形系のシステム固有値は捉えられていて固有値に基づき算出される $\boldsymbol{F}_o$ の最終ゲイン（5[sec]時点の値）は Table 4 に示すように誤差率 6.5%以内で得られている．Fig.5(h),(i)はそれぞれ(53)式のＶＳＳ適応則パラメータ $\hat{\alpha}$ および(52)式の操作量の第一項であり，この両者が他の適応則の場合と大きく異なる．さらに，Fig.5(j)はＶＳＳ系の切換関数 s_c の 1.0[sec]までの推移を示している．最初に，境界層外の 0.58 という大きな値が発生するので，これを除外している．0.2[sec](100 ステップ)程度で切換面に到達していることがわかる．一方，ＳＴＣ系は第一・第二振子の固有振動数は共に 0.67[Hz]程度とゆっくりしている．また，振子の振れ幅は初期角よりも大幅に減少している点，$\boldsymbol{F}_o$ の収束時間および精度よりＳＴＣ系は十分に機能していると考えられる．

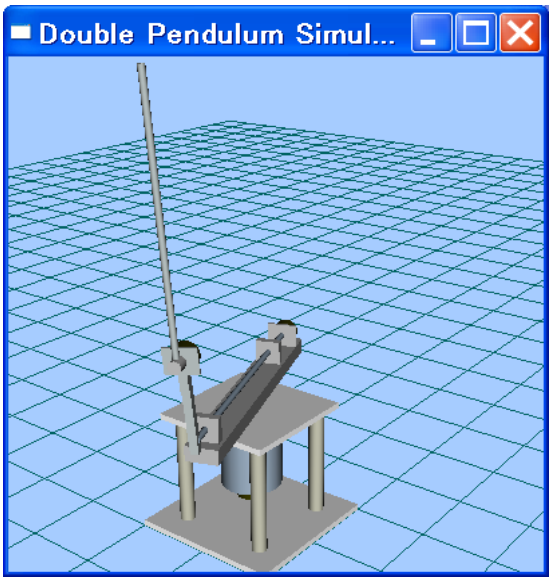
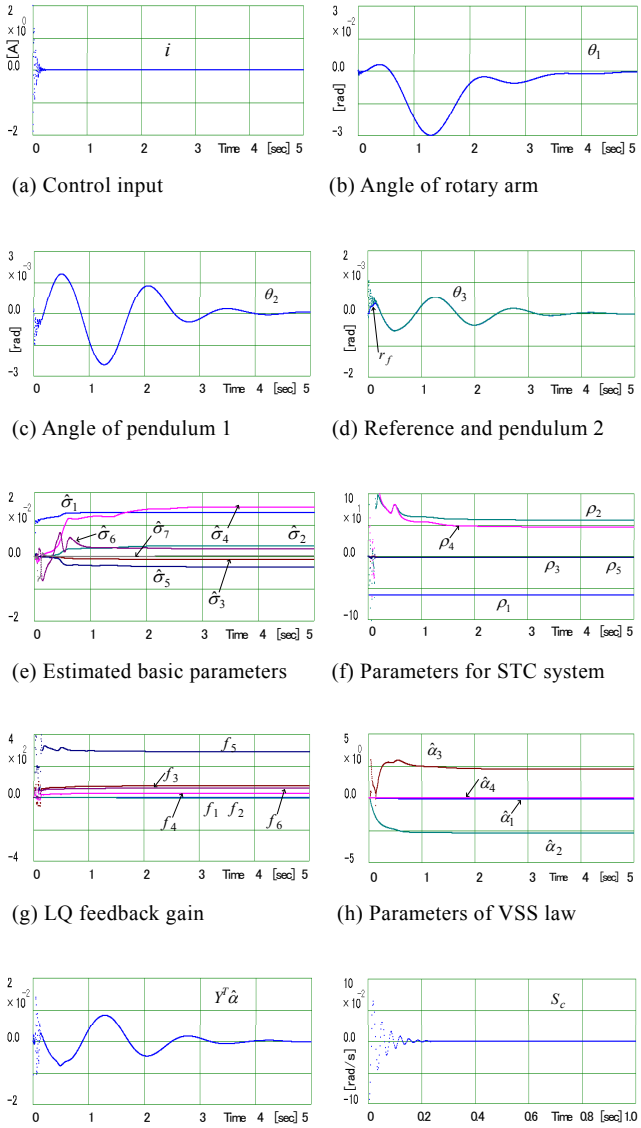


Fig. 4　3D image of a serial rotary-type DIP



(a) Control input　(b) Angle of rotary arm

(c) Angle of pendulum 1　(d) Reference and pendulum 2

(e) Estimated basic parameters　(f) Parameters for STC system

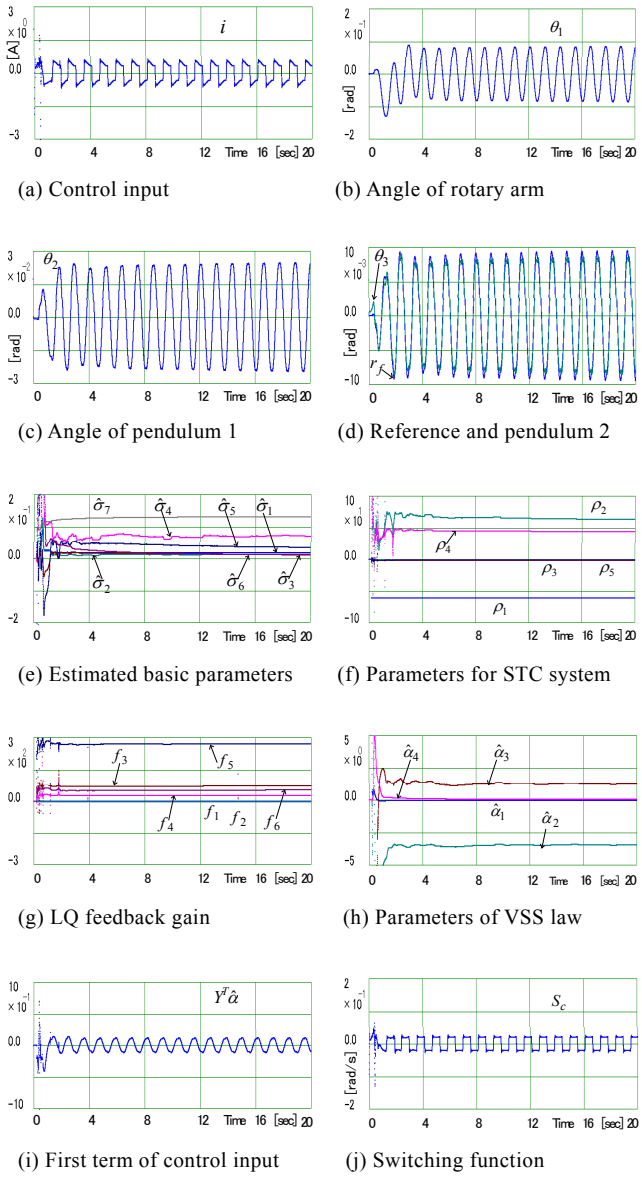
(g) LQ feedback gain　(h) Parameters of VSS law

(i) First term of control input　(j) Switching function

Fig.5 Control simulation of theorem1(Coulomb friction $d_1 = 1e-4$)

次に，クーロン摩擦係数を実機に近い $d_1 = 0.1351$ とした場合，どの適応則でも振子を倒立可能ではあるが，周期 1.1 秒程度で小振幅のリミットサイクルが現れた．定理１を使用し，前と同じ初期角を与えたときの結果を Fig.6 に示す．Fig.6(a)～(d)は運動データであり，Fig.5 の結果と同様に初めの４秒間においてＳＴＣ系のレギュレーション応答がリミットサイクルと重なって見られる．その後，アーム部で 5[deg]，振子１で 1.3[deg]，振子２で 0.5[deg]程度の小振幅のリミットサイクルとなっている．Fig.6(d)では目標角も併せて示していて，追従誤差 e は初期誤差を除いて 0.1[deg]以内である．また，Fig.6(e),(f)はそれぞれ基本パラメータおよびＳＴＣ部のパラメータ推移であり，Fig.6(g)はフィードバックゲイン $\boldsymbol{F}_o$ である．運動データの振れ幅が小さく PE 性の条件が十分ではないため，基本パラメータ推定値に偏りが見られるものの線形系のシステム固有値は十分に捉えられている．即ち，固有値に基づき算出される $\boldsymbol{F}_o$ の収束は速く，１秒程度でほぼ確定している点と最終ゲイン（20[sec]時点の値）が Table 5 に示すように誤差率 3%以内で得られている点からＳＴＣ系が十分に機能していると考えられる．Fig.6(h),(i)はそれぞれ(53)式のＶＳＳ適応則パラメータ $\hat{\alpha}$ および(52)式の操作量の第一項である．命題１・命題２の場合には Fig.6(h)の $\hat{\alpha}$ が非常に小さな推移となる為，Fig.6(i)の $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ も小さく推移し(48)式は第二項が支配項となる．最後に Fig.6(j)は切換関数 s_c であり，一旦，境界層($\delta = 0.1$)から外れるが直ぐに δ 内に拘束されていることがわかる．

次に，外乱として摂動信号を操作量に重畳した場合を示す．まず，命題２を使用し，クーロン摩擦係数を $d_1 = 0.1351$ とし同一初期角のもとで摂動信号（振幅 0.9[A]，周期 1[sec]）を操作量に重畳した結果を Fig.7 に示す．



(a) Control input　(b) Angle of rotary arm

(c) Angle of pendulum 1　(d) Reference and pendulum 2

(e) Estimated basic parameters　(f) Parameters for STC system

(g) LQ feedback gain　(h) Parameters of VSS law

(i) First term of control input　(j) Switching function

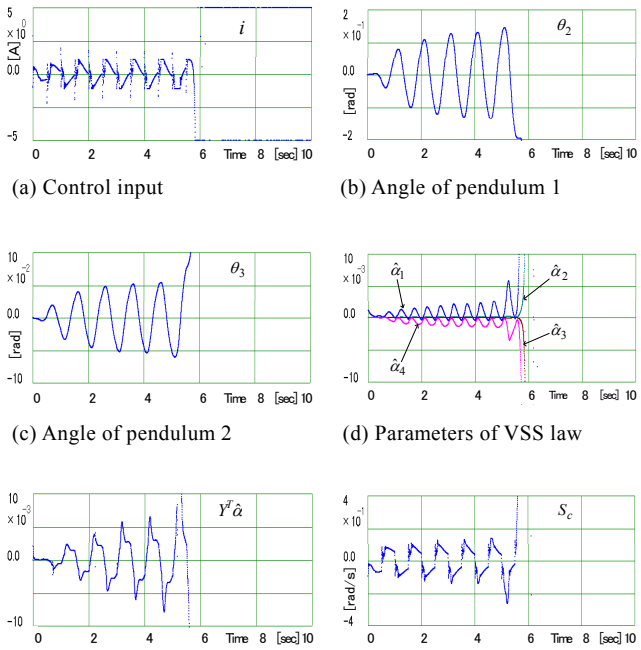
Fig.6 Control simulation of theorem1(Coulomb friction $d_1 = 0.1351$)

Table 4　Final value of LQ feedback gain

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-1.000 0[%]	-1.829 0.66[%]	71.87 1.87[%]	27.19 3.27[%]	292.2 6.41[%]	58.09 5.92[%]

Table 5　Final value of LQ feedback gain

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-1.000 0[%]	-1.836 0.31[%]	72.60 0.88[%]	27.68 1.51[%]	271.1 1.25[%]	53.40 2.62[%]



(a) Control input (b) Angle of pendulum 1

(c) Angle of pendulum 2 (d) Parameters of VSS law

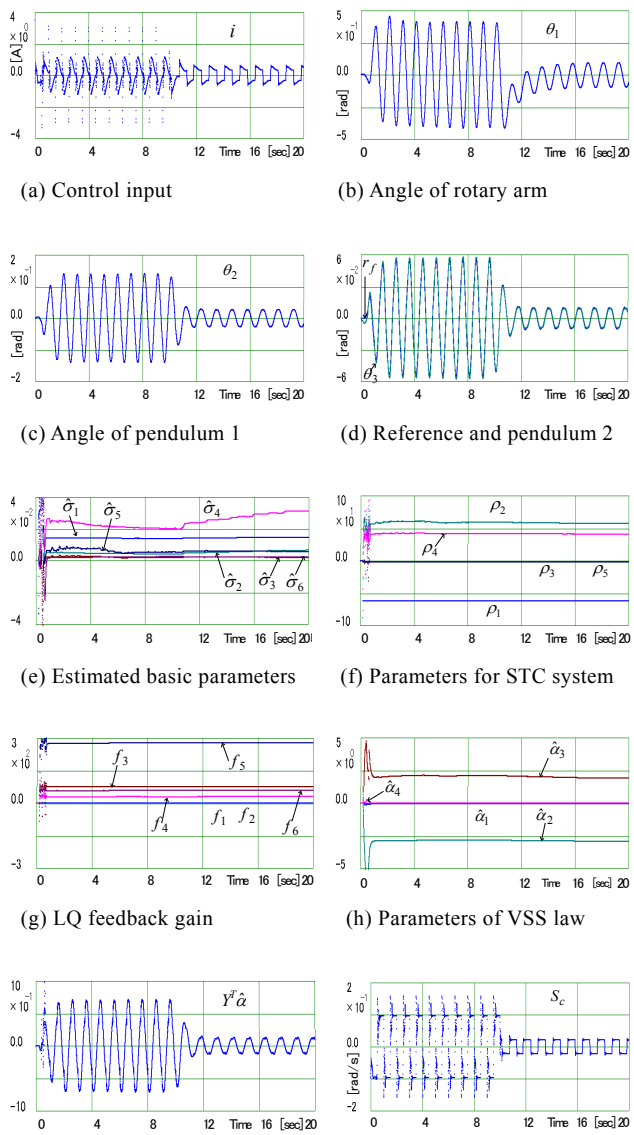
(e) First term of control input (f) Switching function

Fig.7 Control simulation with disturbance (proposition 2)

Fig.7(a)～(c)は運動データであり，アーム角は省略している．開始後５秒間は，操作量に顕著な変化は見られない．しかし，振子角 θ_2 と θ_3 は共に徐々に増大し，５秒過ぎに操作量が過大となり，振子を倒立できなくなっている．この段階では，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ および $\boldsymbol{F}_o$ などに大きな違いはないので省略している．また，Fig.7(d)のＶＳＳパラメータ $\hat{\alpha}$ および Fig.7(e)の $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ も小さく推移しているものの徐々に増大している．Fig.7(f)の切換関数 s_c は摂動信号の影響により周期的に境界層($\delta = 0.1$)から外れ，増大傾向にある．$|s_c| > \delta$ において操作量は(48)式の第二項 $k_v \operatorname{sgn}(s_c)$ が支配的であるが，この値は一定値となってしまう．それを $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 項で補う形となるが Fig.7(d)の $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ が急激に増大する為に $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 項も急激に増大してしまう結果，操作量が過大となり修正動作が機能しなくなってしまう．

一方，定理１を使用し，同一初期角のもとで摂動信号（振幅 1.5[A]，周期 1[sec]）を開始から 10 秒間操作量に重畳した結果を Fig.8 に示す．Fig.8(a)～(d)は運動データであり，大きな摂動信号により開始直後と摂動信号を停止した 10 秒時点後にＳＴＣ系のレギュレーション応答がみられる．摂動外乱においてアーム部で 23[deg]，振子１で 8.5[deg]，振子２で 3.2[deg]程度の振幅のリミットサイクルとなっている．Fig.8(d)では目標角も併せて示していて，追従誤差 e は初期誤差を除いて 0.3[deg]以内である．また，Fig.8(e),(f)はそれぞれ基本パラメータ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ およびＳＴＣ部パラメータ ρ_i の推移であり，$\hat{\sigma}_7$ は大きな値のため除外している．Fig.8(g)はフィードバックゲイン $\boldsymbol{F}_o$ である．摂動信号停止後，Fig.8(e)の $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ が変動するものの線形系の ρ_i および $\boldsymbol{F}_o$ は開始後１秒程度で確定していて，殆ど影響を受けないことがわかる．

また，命題２の場合よりも大きな摂動信号を重畳しているにも拘わらず，Fig.8(h)のＶＳＳパラメータ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は Fig.7(d)のように増大することなく推移していて Fig.8(i)の $Y^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ も適切である．Fig.8(j)の切換関数 s_c は摂動信号の影響により一旦は境界層($\delta = 0.1$) から外れるものの速やかに δ 内に戻る状況が周期的



(a) Control input (b) Angle of rotary arm

(c) Angle of pendulum 1 (d) Reference and pendulum 2

(e) Estimated basic parameters (f) Parameters for STC system

(g) LQ feedback gain (h) Parameters of VSS law

(i) First term of control input (j) Switching function

Fig.8 Control simulation with disturbance (theorem 1)

に繰返され，外乱に対し適切に修正動作が機能していることが確認される．このシミュレーションでは 10 秒間で摂動信号を停止したが，20 秒間摂動信号を加えたときの最終的な $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ および $\boldsymbol{F}_o$ をそれぞれ Table 6 および Table 7 に示す．

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の誤差率は最大 7%を超えるが $\boldsymbol{F}_o$ は 1.5%程度である．以上のシミュレーション結果から，本論文で提案した定理１の適応則は命題２よりも外乱に対してロバスト性に優れていることが確認された．

Table 6 Final estimated value of basic parameters

$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$	$\hat{\sigma}_6$	$\hat{\sigma}_7$
1.433e-2 0.67[%]	3.814e-3 6.43[%]	2.212e-3 6.36[%]	1.958e-2 3.59[%]	6.256e-3 7.32[%]	2.640e-3 5.58[%]	1.338e-1 0.98[%]

Table 7 Final value of LQ feedback gain

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-1.000 0.0[%]	-1.846 0.24[%]	73.70 0.63[%]	28.42 1.11[%]	276.6 0.74[%]	55.69 1.55[%]

５．　おわりに

本研究では，回転型二重倒立振子の基本パラメータを未知とした適応制御系設計の一方法を提案した．提案法では第一振子の安定性を仮定して第二振子部に目標値追従型のＶＳＳ適応則を適用し安定系を構築した．同時に，第一振子および回転アームを安定化する目標角を生成するＳＴＣ系を構築した．また，ＳＴＣ系構築に必要な基本パラメータ推定値を使用し，外乱に対してロバスト性を改善する適応則を提案した．数値シミュレーションを通して，ＶＳＳ系の到達時間は短くＳＴＣ系との相補効果による適応制御系が有効であることを示した．さらに，摂動外乱を付加することにより提案法が外乱に強いことも示した．今後は二重振子系実機において同時適応安定化の検証，および第一振子をＶＳＳ適応制御で安定化すると同時に，系全体の基本パラメータを推定し，その後に全体系を安定化する二段階での安定化実験なども実施する予定である．

参考文献

1) 木和，田崎，柴田: 二足歩行ロボットの重心加速度制御による踏み出し動作，電気学会論文集 D，124‐10，1017/1022 (2004)
2) M.W. Spong: Project-Based Control Education: Plenary Lecture, 7th IFAC Symposium on Advances in Control Education ACE’06, 39/47 (2006)
3) K. Pathak, J. Franch, and S.K. Agrawal: Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization, IEEE Trans. Robotics, 21‐3, 505/513 (2005)
4) G. A. Medrano-Cerda: Robust computer control of an inverted pendulum, IEEE Contr. Syst. Magazine, 19‐3, 58/67, (1999)
5) 逸見，Deng. M, 井上，植木，平嶋：台車型直列二重倒立振子の振り上げ制御，日本機械学会論文集，C 編，71‐704, 1269/1275, (2005)
6) J.-J. E. Slotine and W. Li: Adaptive manipulator control‐A Case study‐, IEEE Trans. AC, 33‐11, 995/1003 (1988)
7) J.-J. E. Slotine and W. Li: Applied Nonlinear Control, Prentice Hall (1991)
8) M. Yamakita, K. Furuta, K. Konohara, J. Hamada and H. Kusano: VSS Adaptive Control Based on Nonlinear Model for TITech Pendulum, Proc. IEEE IECON’92, 1488/1493 (1992)
9) 深尾，足立：倒立振子・台車系の部分的適応制御，システム制御情報学会論文誌，14‐5, 259/264　(2001)
10) 平田，高部，穴吹，大内: セルフチューニング制御器を組込んだ回転型倒立振子のＶＳＳロバスト適応制御，電気学会論文集 C，128‐4，618/627　(2008)
11) K. J. Åström and B. Wittenmark: Adaptive Control, Addison Wesley (1989)
11) 戸川：マトリクスの数値計算，オーム社（1985）
13) P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic: Robust Redesign of Adaptive Control, IEEE Trans. AC, 29‐3, 202/211 (1984)
14) H. Hirata, K. Haga, M Anabuki, S. Ouchi and P. Ratiroch-Anant: Self-Tuning Control for Rotation Type Inverted Pendulum Using Two Kinds of Adaptive Controllers, Proc. IEEE RAM Conf., 418/423 (2006)
15) 大須賀：メカニカルシステムの同定，計測と制御，33‐6, 487/493 (1994)
16) R. Phornsuk, M. Anabuki and H. Hirata: Adaptive motion control of a two-link Direct Drive Manipulator using disturbance observer, IEEE TENCON’02, 1725/1728 (2002)
17) 新中：適応アルゴリズム，産業図書（1990）
18) 野波，田: スライディングモード制御，コロナ社 (1994)
19) 床井: GLUT による OpenGL 入門，工学社 (2005)