

# 1. 制御対象について

## 減速器付きロボットアームのモデル化

ロボットアーム第1軸のトルク制御系について、減速器付きアームを2慣性モデルで考察する場合も考えられるが、ここでは簡単に1慣性系としてモデル化する。

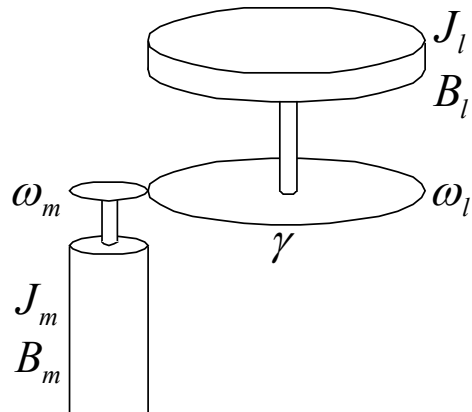


Fig.1 減速器付きアーム

Fig.1 に示した機械系を運動方程式で表すと以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m \omega_m &= K_\tau i - \tau_m - \tau_f \\
 J_l \frac{d\omega_l}{dt} + B_l \omega_l &= \tau_l \\
 \omega_l &= \frac{\omega_m}{\gamma} \\
 \tau_l &= \gamma \tau_m
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $\tau_f$  はクーロン摩擦トルク、 $\gamma$  は減速比である。

モータ軸に換算すると式(1)は次式のようにまとめられる。

$$\left( J_m + \frac{J_l}{\gamma^2} \right) \frac{d\omega_m}{dt} + \left( B_m + \frac{B_l}{\gamma^2} \right) \omega_m = K_\tau i - \tau_f \quad (2)$$

また、式(2)のシステムをブロック図で表すと Fig.2 のようになる。

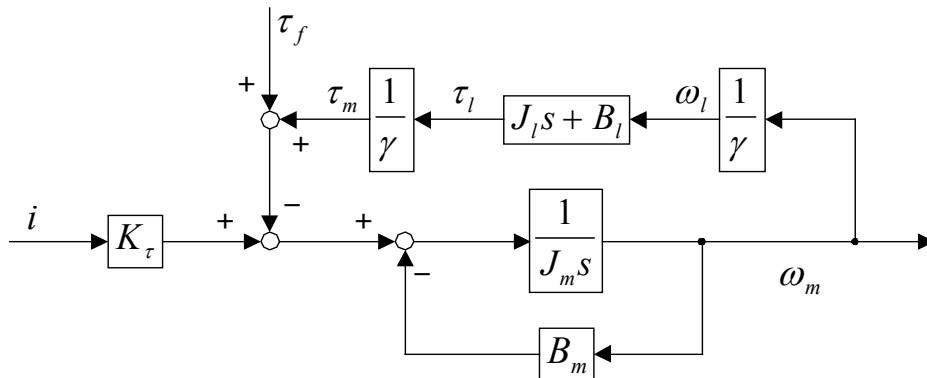


Fig.2 減速器付きアームのブロック線図

ここで、アクチュエータにDCモータを使用した制御系を考える。  
DCモータ電気回路方程式は以下のように記述できる。

$$L \frac{di}{dt} + R_a i = e - K_e \omega_m \quad (3)$$

モータ制御系を考える際、モデルの簡単化の為に電気回路インダクタンス  $L$ 、粘性摩擦係数  $B_m$ 、負荷部分の粘性摩擦係数  $\frac{B_l}{\gamma^2}$  を無視する場合ことにする。さらに、 $J = J_m + \frac{J_l}{\gamma^2}$  とすると減速器付きアーム系は以下の Fig.3 のブロック線図で記述される。

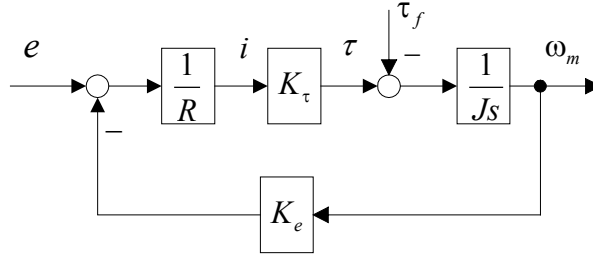


Fig.3 簡単化された減速器付きアームのブロック線図

また、モータトルクを制御するために電流フィードバックを施したサーボ系のブロック線図は以下のように表せる。

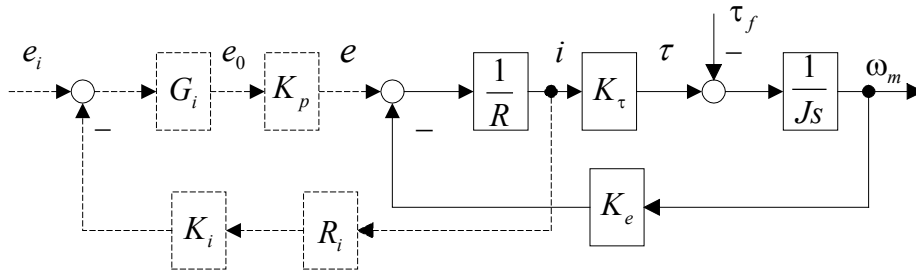


Fig.4 電流フィードバックを施したサーボ系

ただし、 $K_p$  はパワーアンプゲイン、 $G_i$  は電流アンプ伝達関数、 $R_i$  は電流検出抵抗、 $K_i$  は帰還定数である。

ここで、電流アンプに次のような1次遅れアンプ

$$G_i = \frac{K_{11}}{1 + Ts} \quad (4)$$

を使用するとき、電流指令電圧  $e_i$  [Volt] からモータ速度  $\omega_m$  [rad/sec] までの伝達関数  $G_0$  は

$$G_0 = \frac{\omega_m}{e_i} = \frac{K_{11} K_p K_\tau}{J R T s^2 + (J R + J K_{11} K_p K_i R_i + K_\tau K_e T) s + K_\tau K_e} \cong \frac{K_0}{1 + T_r s} \quad (5)$$

ただし、

$$K_0 = \frac{K_{11} K_p}{K_e}, \quad T_r = \frac{J R + J K_{11} K_p K_i R_i + K_\tau K_e T}{K_\tau K_e} \quad (6)$$

となる。

つぎに、ロボットアームの関節角度は関節に配置されたロータリエンコーダにより検出される。したがって、モータ部分を (5) 式で簡略化すると、関節トルク入力  $e_i$  [Volt] からロボットアーム回転角  $\theta_{arm}$  [deg] までのブロック線図は以下ようになる。

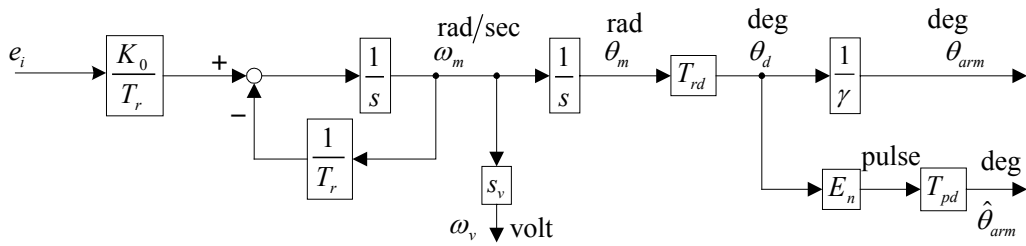


Fig.5 関節トルク入力  $e_i$  からアーム回転角  $\theta_{arm}$  までのブロック線図

ただし、 $T_{rd}$  は  $T_{rd} = 180/\pi$  [deg/rad] の角度変換定数であり、 $E_n$  はエンコーダ分解能から決められる定数、 $T_{pd}$  はアームが 1 回転するときの総パルス数より決められる定数である。

このとき、表-1 の諸定数を使用し、慣性として  $J = J_m + \frac{J_l}{\gamma^2}$  を考慮した関節トルク入力  $e_i$  [Volt] からロボットアーム回転角  $\theta_{arm}$  [deg] までの伝達関数  $G_1(s)$  は

$$K_0 = \frac{K_{11}K_p}{K_e} = \frac{30 \times 2}{0.071} \cong 845$$

$$T_r = \frac{JR + JK_{11}K_pK_iR_i + K_\tau K_e T}{K_\tau K_e} = \frac{0.1342 \times 10^{-4} (7.6 + 60 \times 0.2 \times 7.7) + 0.071^2 \times 10^{-3}}{0.071^2} \cong 0.267$$

より

$$G_1(s) = \frac{K_0 T_{rd}}{\gamma(1 + T_r s)s} = \frac{845 \times 180}{100\pi(1 + 0.267s)s} \cong \frac{1813}{s(s + 3.75)} \quad (7)$$

のように求められる。

表-1 アーム第1軸の諸定数

$K_\tau = 7.1 \times 10^{-2} [Nm/A]$ $K_e = 7.1 \times 10^{-2} [Vs/rad]$ $R_a = 7.4 [\Omega]$ $J_m = 0.12 \times 10^{-4} [Kgm^2]$ $J_l = 0.0142 [Kgm^2]$	$K_p = 2$ $R_i = 0.2 [\Omega]$ $K_i = 7.7$ $T = 0.001$ $K_{11} = 30$	$\gamma = 100$ $T_{rd} = \frac{180}{\pi} [deg/rad]$ $E_n = \frac{10}{9} [pulse/deg]$ $T_{pd} = \frac{9}{1000} [deg/pulse]$ $S_v = \frac{400}{2\pi} \times 10^{-4} [Vs/rad]$
--	--	---

## 2. 制御器について

### 2-1 I-PD制御系の構成

ロボットアームの位置制御（定点への移動制御）には1型サーボが適している。1型サーボの実現法は数多いが、ここではI-PD制御を使用した構成を示す。Fig.6に示す制御系は、比例動作、微分動作のいずれもが観測量にだけ働き目標値には影響を与えない。積分コントローラ（I）である $G_1$ とそれ以外の比例（P）・微分（D）制御コントローラが分離していることからI-PD制御と呼ばれている。

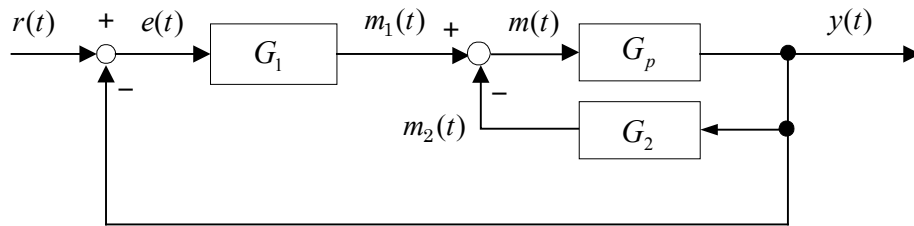


Fig.6 I-PDの制御系の構成ブロック

制御対象であるロボットアームは次式で記述される場合が多い。

$$G_p(s) = \frac{b}{s(s+a)} \quad (1)$$

また、 $G_1, G_2$  はI-PDコントローラであり、それぞれ

$$G_1 = \frac{k}{s} \quad (2)$$

$$G_2 = f_0 + f_1 s \quad (3)$$

で与えられる。Fig.1の閉ループ伝達関数 $W(s)$ は

$$W(s) = \frac{G_1 G_p}{1 + (G_1 + G_2) G_p} \quad (4)$$

となる。ここで、(1)式の制御対象 $G_p(s)$ の全分母展開形式

$$G_p(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \quad , \quad a_0 = 0, \quad a_1 = a/b, \quad a_2 = 1/b \quad (5)$$

を使用し、式(4)に(2), (3), (5)を代入すると閉ループ系伝達関数 $W(s)$ は

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\frac{k}{s} \left( \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 s^2} \right)}{1 + \left( \frac{k}{s} + f_0 + f_1 s \right) \left( \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 s^2} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{a_0 + f_0}{k} s + \frac{a_1 + f_1}{k} s^2 + \frac{a_2}{k} s^3} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。次に、(6)式の閉ループ系伝達関数 $W(s)$ を標準形システムとモデルマッチさせることにより、特性指定が実施される。対象が(1)式に限定されているので、ここでは3次系の特性指定を行う。

まず、コントローラパラメータを決定するために以下の3次の全分母展開型伝達関数 $H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s + \beta_2 \tau^2 s^2 + \beta_3 \tau^3 s^3} \quad (7)$$

が与えられる。(7)式の表現は3次の標準形伝達関数 $H(s)$

$$H(s) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + \gamma_2 \omega_0 s^2 + \gamma_1 \omega_0^2 s + \omega_0^3} \quad (8)$$

が与えられるとき、以下のように変形

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_1}{\omega_0} s + \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \frac{\gamma_1^2}{\omega_0^2} s^2 + \frac{1}{\gamma_1^3} \frac{\gamma_1^3}{\omega_0^3} s^3} \quad (9)$$

すると、(7)式の係数  $\tau$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  は以下のように与えられる。

$$\tau = \frac{\gamma_1}{\omega_0}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\gamma_1^3} \quad (10)$$

また、標準形伝達関数  $H(s)$  としては、Butterworth, Bessel, Binomial 等のモデルが良く使用される。以上により、(6)式と(7)式の特性多項式の係数比較により、コントローラのパラメータ  $k$ ,  $f_0$ ,  $f_1$  が次のように決定できる。

$$k = \frac{a_2}{\beta_3 \tau^3} \quad (11)$$

$$f_0 = k\tau - a_0 \quad (12)$$

$$f_1 = \beta_2 k \tau^2 - a_1 \quad (13)$$

## 2-2 I-PDコントローラの離散化

ロボットアームの位置制御には、コンピュータによるソフトウェアサーボが使用される。そこで、導出されたI-PDコントローラをコンピュータ処理に適した離散コントローラに変換する。双一次変換を行い離散化する。コントローラ  $G_2$  の微分要素については近似微分処理を施してから双一次変換を行う。

まず、(2)式のIコントローラ  $G_1(s)$  に双一次変換式

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad T: \text{ sampling period} \quad (14)$$

を代入すると離散積分補償器  $G_1(z)$  は

$$G_1(z) = \frac{Tk(z+1)}{2(z-1)} = \frac{c_0(1+z^{-1})}{1-z^{-1}}, \quad c_0 = Tk/2 \quad (15)$$

となる。つぎに、近似微分を施したPDコントローラ

$$G_2(s) = f_0 + \frac{f_1 s}{1 + \delta s} \quad (16)$$

に(14)式を代入すると離散補償器  $G_2(z)$  は

$$\begin{aligned} G_2(z) &= f_0 + \frac{2f_1(z-1)}{T(z+1) + 2\delta(z-1)} \\ &= \frac{(f_0 T + 2f_0 \delta + 2f_1) + (f_0 T - 2f_0 \delta - 2f_1)z^{-1}}{(T + 2\delta) + (T - 2\delta)z^{-1}} = \frac{b_{10} + b_{11}z^{-1}}{1 + a_{11}z^{-1}} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ただし、係数は次式で与えられる。

$$a_{11} = \frac{T - 2\delta}{T + 2\delta}, \quad b_{10} = \frac{f_0 T + 2f_0 \delta + 2f_1}{T + 2\delta}, \quad b_{11} = \frac{f_0 T - 2f_0 \delta - 2f_1}{T + 2\delta} \quad (18)$$

ここで、 $G_1(z)$  と  $G_2(z)$  の入出力変数を次式

$$G_1(z) = \frac{M_1(z)}{E(z)}, \quad G_2(z) = \frac{M_2(z)}{Y(z)} \quad (19)$$

で定義すると、コントローラの差分方程式はそれぞれ次式でまとめられる。

$$m_1(k) = m_1(k-1) + c_0 e(k) + c_0 e(k-1) \quad (20)$$

$$m_2(k) = -a_{11} m_2(k-1) + b_{10} y(k) + b_{11} y(k-1) \quad (21)$$

## 2-3 設計例

対象のロボットアーム伝達関数は次式で与えられるものとする。

$$G_p(s) = \frac{b}{s(s+a)} \frac{[\text{deg}]}{[\text{Volt}]}, \quad a = 3.75, \quad b = 1813 \quad (22)$$

制御系の閉ループ特性指定の為に 3 次の Binomial モデルを使用すると、(8)式において係数は  $\gamma_1 = 3$ ,  $\gamma_2 = 3$  であり、(10)式係数は  $\beta_2 = 0.3333$ ,  $\beta_3 = 0.03704$  となる。また、制御系の応答速度を係数  $\tau$  によって決定する。ここで、 $\tau = 0.3$  [sec] と選定するとき、IPD 制御器定数  $k$ ,  $f_0$ ,  $f_1$  は次式で与えられる。

$$k = \frac{a_2}{\beta_3 \tau^3} = \frac{5.316 \times 10^{-4}}{0.03704 \times (0.3)^3} \approx 0.5515 \quad (23)$$

$$f_0 = k\tau - a_0 \approx 0.1655 \quad (24)$$

$$f_1 = \beta_2 k \tau^2 - a_1 = 0.3333 \times 0.5515 \times (0.3)^2 - 2.068 \times 10^{-3} \approx 1.448 \times 10^{-2} \quad (25)$$

$$\text{ただし、} a_0 = 0, \quad a_1 = (a/b) \approx 2.068 \times 10^{-3}, \quad a_2 = (1/b) \approx 5.516 \times 10^{-4} \quad (26)$$

次に、連続時間制御器から離散時間制御器を求める。制御周期  $T$  を  $T = 0.01$  と [sec] とし、近似微分低域フィルタの時定数  $\delta$  を  $\delta = 0.03$  と [sec] と選定するとき、離散積分補償器係数  $c_0$  は

$$c_0 = (T k / 2) \approx 2.7575 \times 10^{-3}$$

となり、離散積分補償器係数  $a_{11}$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{11}$  は次式で与えられる。

$$a_{11} = \frac{T - 2\delta}{T + 2\delta} = \frac{0.01 - 2 \times 0.03}{0.01 + 2 \times 0.03} \approx -0.7143$$

$$b_{10} = \frac{f_0 T + 2f_0 \delta + 2f_1}{T + 2\delta} = \frac{0.1655 \times (0.01 + 2 \times 0.03) + 2 \times 1.448 \times 10^{-2}}{0.01 + 2 \times 0.03} = \frac{0.040545}{0.07} \approx 0.5792$$

$$b_{11} = \frac{f_0 T - 2f_0 \delta - 2f_1}{T + 2\delta} = \frac{0.1655 \times (0.01 - 2 \times 0.03) - 2 \times 1.448 \times 10^{-2}}{0.01 + 2 \times 0.03} = \frac{-0.037235}{0.07} \approx -0.5319$$

### レポート課題

対象のロボットアーム伝達関数は次式で与えられるものとする。

$$G_p(s) = \frac{b}{s(s+a)} \frac{[\text{deg}]}{[\text{Volt}]}, \quad a = 13.25, \quad b = 1881 \quad (27)$$

このとき、上記と同様の設計法により① I - P D 制御器を設計せよ。

② GLUT による 3 D 制御シミュレーションプログラムを完成せよ。③ 結果について検討せよ。

レポートはワードで作成し、ソースファイルと実行ファイル両者を添付ファイルにて次のメールアドレス hirata@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp 宛 1 月 22 日 (月) までに送信して下さい。

標準形伝達関数の例

二項係数標準形

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_0 \\
 & s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \\
 & s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\
 & s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\
 & s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\
 & s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\
 & s^7 + 7\omega_0 s^6 + 21\omega_0^2 s^5 + 35\omega_0^3 s^4 + 35\omega_0^4 s^3 + 21\omega_0^5 s^2 + 7\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\
 & s^8 + 8\omega_0 s^7 + 28\omega_0^2 s^6 + 56\omega_0^3 s^5 + 70\omega_0^4 s^4 + 56\omega_0^5 s^3 + 28\omega_0^6 s^2 + 8\omega_0^7 s + \omega_0^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{2^2}{1} = 4 \\
 \gamma_1 &= \frac{3^2}{3} = 3, \quad \gamma_2 = \frac{3^2}{3} = 3
 \end{aligned}$$

バターワース標準形

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_0 \\
 & s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2 \\
 & s^3 + 2.0\omega_0 s^2 + 2.0\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\
 & s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\
 & s^5 + 3.24\omega_0 s^4 + 5.24\omega_0^2 s^3 + 5.24\omega_0^3 s^2 + 3.24\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\
 & s^6 + 3.86\omega_0 s^5 + 7.46\omega_0^2 s^4 + 9.13\omega_0^3 s^3 + 7.46\omega_0^4 s^2 + 3.86\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\
 & s^7 + 4.5\omega_0 s^6 + 10.1\omega_0^2 s^5 + 14.6\omega_0^3 s^4 + 14.6\omega_0^4 s^3 + 10.1\omega_0^5 s^2 + 4.5\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\
 & s^8 + 5.12\omega_0 s^7 + 13.14\omega_0^2 s^6 + 21.84\omega_0^3 s^5 + 25.69\omega_0^4 s^4 + 21.84\omega_0^5 s^3 + 13.14\omega_0^6 s^2 + 5.12\omega_0^7 s + \omega_0^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{1.4^2}{1} = 1.96 \\
 \gamma_1 &= \frac{2^2}{2} = 2, \quad \gamma_2 = \frac{2^2}{2} = 2
 \end{aligned}$$

ITAE 最小標準形

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_0 \\
 & s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2 \\
 & s^3 + 1.75\omega_0 s^2 + 2.15\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\
 & s^4 + 2.1\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.7\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\
 & s^5 + 2.8\omega_0 s^4 + 5.0\omega_0^2 s^3 + 5.5\omega_0^3 s^2 + 3.4\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\
 & s^6 + 3.25\omega_0 s^5 + 6.60\omega_0^2 s^4 + 8.60\omega_0^3 s^3 + 7.45\omega_0^4 s^2 + 3.95\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\
 & s^7 + 4.475\omega_0 s^6 + 10.42\omega_0^2 s^5 + 15.08\omega_0^3 s^4 + 15.54\omega_0^4 s^3 + 10.64\omega_0^5 s^2 + 4.58\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\
 & s^8 + 5.20\omega_0 s^7 + 12.80\omega_0^2 s^6 + 21.60\omega_0^3 s^5 + 25.75\omega_0^4 s^4 + 22.20\omega_0^5 s^3 + 13.30\omega_0^6 s^2 + 5.15\omega_0^7 s + \omega_0^8
 \end{aligned}$$