

# D8 VSS 適応制御を用いた回転型二重倒立振子の安定化に関する研究

発表者：7ADGM017 中山 裕介  
 指導教員：大内 茂人 教授  
 平田 弘志 准教授

## Stabilization of a Rotary Double Inverted Pendulum using VSS Adaptive Control System

**Abstract:** We propose a new VSS (Variable Structure System) robust adaptive control system including a self-tuning controller for a rotary double inverted pendulum whose whole basic parameters are unknown. The rotational angle of the second pendulum is stabilized by tracking type's VSS adaptive control method, and STC (Self-Tuning Control) system is simultaneously adopted in order to guarantee a stable system, which provides a boundary reference angle for the second pendulum. STC system recursively updates LQ controller design by developing an efficient QR method for real time operation.

Finally, the validity of the proposed system is verified through some numerical simulations and practical experimental result.

### 1. まえがき

本研究では、安定範囲が狭く制御が難しいとされる回転型二重倒立振子の適応制御系を実現する。適応制御実施において第2振子部分の安定化にVSS適応制御則を適用し、外乱に対してロバストな適応制御系を構築する。また、同時にセルフチューニング制御系(STC)を導入し、有界な振子目標角を保証する安定な系を構築する。このとき、VSS適応制御と併行して、倒立振子系の基本パラメータを逐次推定し、これによりSTCを達成する。

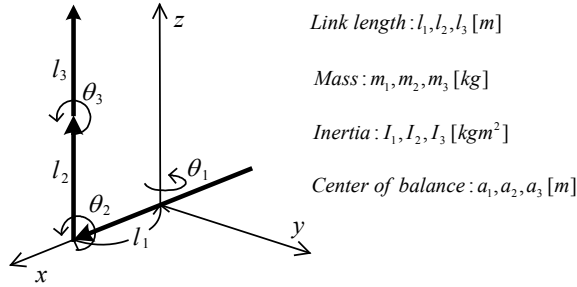


Fig.1 回転型二重倒立振子のモデル図

### 2. 制御対象と基本パラメータ

回転型二重倒立振子の簡略化した運動モデルを Fig.1 に示す。パラメータに関する線形関係式は

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + B\dot{\theta} + D(\theta) = \Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\zeta \quad (1)$$

$$\Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) := \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \dot{\theta}_1 & \text{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ 0 & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} & 0 & \phi_{35} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\zeta^T := [J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad r_1 \quad r_2 \quad b_1 \quad d_1], \tau^T = [\tau_1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\phi_{12} := S_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2S_2 C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \phi_{13} := S_{23}^2 \ddot{\theta}_1 + 2S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3),$$

$$\phi_{14} := -l_1 C_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 S_2 \dot{\theta}_2^2, \phi_{23} := \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 - S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1^2,$$

$$\phi_{15} := 2l_2 S_2 S_{23} \ddot{\theta}_1 - l_1 C_{23} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + h_{11} + h_{12},$$

$$\phi_{22} := \ddot{\theta}_2 - S_2 C_2 \dot{\theta}_1^2, \phi_{24} := -l_1 C_2 \ddot{\theta}_1 - g S_2,$$

$$\phi_{25} := -l_1 C_{23} \dot{\theta}_1 + l_2 C_3 (2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - l_2 S_3 \dot{\theta}_3 (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$$

$$- l_2 (C_2 S_{23} + S_2 C_{23}) \dot{\theta}_1^2 - g S_{23}, \phi_{33} := \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 - S_{23} C_{23} \dot{\theta}_1^2,$$

$$\phi_{35} := -l_1 C_{23} \dot{\theta}_1 + l_2 (C_3 \ddot{\theta}_2 - S_2 C_{23} \dot{\theta}_1^2 + S_3 \dot{\theta}_2^2) - g S_{23}.$$

として表せる。ここで  $\Phi(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$  は regressor 行列、 $\zeta$  は基本パラメータである。また、モータトルク定数  $k_\tau$  が不確定な場合を考慮して(1)式を次式のようにして使用する。

$$\begin{cases} i = \Phi^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\sigma, & i^T := [i \quad 0 \quad 0] \\ \sigma := \zeta^T / k_\tau = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \quad \sigma_7] \\ \sigma_1 := J_1 / k_\tau, \sigma_2 := J_2 / k_\tau, \sigma_3 := J_3 / k_\tau, \\ \sigma_4 := r_1 / k_\tau, \sigma_5 := r_2 / k_\tau, \sigma_6 := b_1 / k_\tau, \sigma_7 := d_1 / k_\tau \end{cases} \quad (3)$$

### 3. 第二振子系の安定化

平衡点近傍で線形化した回転型二重倒立振子の運動方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \theta_2 + g_3 \theta_3 \\ g_3 (\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \text{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\tau i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

但し、 $m_{11} := J_1$ ,  $m_{12} := -l_1(r_1 + r_2)$ ,  $m_{13} := -l_1 r_2$ ,

$$m_{22} := J_2 + J_3 + 2l_2 r_2, \quad m_{23} := J_3 + l_2 r_2, \quad m_{33} := J_3,$$

$$g_2 := -(r_1 + r_2)g, \quad g_3 := -r_2 g.$$

であり、 $k_\tau$  はトルク定数、 $i$  はモータ電流で入力トルクを  $\tau_1 = k_\tau i$  としている。

第二振子角加速度における振子系の方程式は、次式となる。

$$(\det M)\ddot{\theta}_3 + (H_1 g_3 - H_3 g_2)\theta_2 + (H_1 - H_3)g_3 \theta_3 + H_4 b_1 \dot{\theta}_1 + H_4 d_1 \text{sgn}(\dot{\theta}_1) = H_4 k_\tau i \quad (5)$$

$$\begin{cases} \det M := (H_1 H_2 - H_3^2) / m_{11}, H_1 := m_{11} m_{22} - m_{12}^2 \\ H_2 := m_{11} m_{33} - m_{13}^2, H_3 := m_{11} m_{23} - m_{12} m_{13} \\ H_4 := m_{12} m_{23} - m_{13} m_{22} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、第二振子の回転角度  $\theta_3$  を安定化する設計を行う。

$$e := \theta_3 - r_f, \quad \dot{\theta}_r := \dot{r}_f - h e, \quad (h > 0), \quad s_c := \dot{e} + h e \quad (7)$$

とすると、(5) 式は以下のように表せる。

$$\begin{cases} Y^T \alpha + H s_c = i + w \\ H := (\det M) / H_4 k_\tau \\ s_c := \ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_r \end{cases} \quad (8)$$

$$\det M := m_{11} m_{22} m_{33} - m_{22} m_{13}^2 - m_{12}^2 m_{33} - m_{11} m_{23}^2 + 2 m_{12} m_{13} m_{23} > 0 \quad (9)$$

また、 $w$  は等価外乱項、 $Y$  は計測値から構成されるベクトル、 $\alpha$  はパラメータベクトルであり、次の(10)式

$$\begin{cases} Y^T = [\ddot{\theta}_r \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_1] \\ \alpha^T = [H \quad \alpha_2 \quad (H_1 - H_3)g_3 / H_4 k_\tau \quad b_1 / k_\tau] \\ \alpha_2 := (H_1 g_3 - H_3 g_2) / H_4 k_\tau \end{cases} \quad (10)$$

$$\ddot{\theta}_r := \ddot{r}_f - h \dot{e} \quad (11)$$

で与えられる。以上の仮定の下で、ロバスト性を向上した VSS 適応制御則を以下に示す。

[命題 1] VSS 適応制御の操作量及びパラメータ適応則をそれぞれ次式とする。

$$\begin{cases} i = \mathbf{Y}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v \operatorname{sgn}(s_c), & (k_v > 0) \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T := [\hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}_2 \quad \hat{\alpha}_3 \quad \hat{\alpha}_4] \end{cases} \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = -k_a \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y} s_c, \quad (k_a > 0, \mathbf{\Gamma} > 0). \quad (13)$$

ここで、 $k_v$  は VSS ゲインであり、 $\mathbf{\Gamma}$  は適応則ゲインで対称行列とする。目標角  $r_f$  が安定に与えられるとき、 $t \rightarrow \infty$  で  $s_c \rightarrow 0$  となる。即ち、 $e \rightarrow 0$  となり、第 2 振子角  $\theta_3$  は目標角  $r_f$  に追従する。□

#### 4. 倒立振り子の基本パラメータ逐次推定

命題 1 より振子 2 の安定性が保証された状態で基本パラメータを推定する。推定モデルは

$$\begin{cases} \mathbf{v}(k) = \mathbf{\Phi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k) \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T(k) := [\hat{\sigma}_1(k) \quad \hat{\sigma}_2(k) \quad \dots \quad \hat{\sigma}_7(k)] \end{cases} \quad (14)$$

であり、 $\mathbf{\Phi}(k)$  は (2) 式の regressor 行列である。また、逐次推定はサンプリング周期毎に得られる運動データ  $\Lambda_a = \{i_a(k), \theta_a(k), \dot{\theta}_a(k), \ddot{\theta}_a(k)\}$  を用いて実施される。

#### 5. 有界振り子目標角を与える STC

(4) 式から角加速度  $\ddot{\theta}_1$  および  $\ddot{\theta}_2$  に関する方程式を求める。

$$H_4 \ddot{\theta}_1 = (m_{22} m_{33} - m_{23}^2) \ddot{\theta}_3 + (m_{22} g_3 - m_{23} g_2) \theta_2 + (m_{22} - m_{23}) g_3 \theta_3 \quad (16)$$

$$H_4 \ddot{\theta}_2 = (m_{13} m_{23} - m_{12} m_{33}) \ddot{\theta}_3 + (m_{13} g_2 - m_{12} g_3) \theta_2 + (m_{13} - m_{12}) g_3 \theta_3 \quad (17)$$

ここで、 $m_{13} g_2 - m_{12} g_3 = 0$  に留意する。第 2 振子の制御系がスライディングモードであるなら、命題 1 より振り子角度  $\theta_3$  は目標角度に追従 ( $e = 0$ ) する。 $\theta_3 = r_f$  とみなして、 $\theta_3$  を  $r_f$  で置換えると両式は

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \rho_1 \theta_2 + \rho_2 r_f + \rho_3 \ddot{r}_f \\ \ddot{\theta}_2 = \rho_4 r_f + \rho_5 \ddot{r}_f \end{cases} \quad (18)$$

但し、

$$\rho_1 := (m_{22} g_3 - m_{23} g_2) / H_4, \quad \rho_2 := (m_{22} - m_{23}) g_3 / H_4$$

$$\rho_3 := (m_{22} m_{33} - m_{23}^2) / H_4, \quad \rho_4 := (m_{13} - m_{12}) g_3 / H_4$$

$$\rho_5 := (m_{13} m_{23} - m_{12} m_{33}) / H_4.$$

と記述できる。(18) 式の未知パラメータ系の制御方策として、パラメータ  $\sigma_i$  を推定しながら制御器を調整する STC を実施する。このとき、(10) 式の VSS 制御系のパラメータ  $\boldsymbol{\alpha}$  では (18) 式の係数  $\rho_i (i = 1, \dots, 5)$  を表現することは困難であるが、(14) の推定値  $\hat{\sigma}_i(k)$  を用いると表現可能となる。また、安定化制御器に LQ 制御を使用するために、(16) 式を推定値  $\hat{\sigma}_i(k)$  記述の状態方程式で表記すると

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{r}_f \\ \ddot{r}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ r_f \\ \dot{r}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_3 \\ 0 \\ \rho_5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{r}_f \quad (19)$$

$$\rho_1 := -g/l_1, \quad \rho_2 := -(\hat{\sigma}_2(k) + l_2 \hat{\sigma}_5(k)) \hat{\sigma}_5(k) g / d_n$$

$$\rho_3 := (\hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_3(k) - l_2^2 \hat{\sigma}_5^2(k)) / d_n,$$

$$\rho_4 := -l_1 g \hat{\sigma}_4(k) \hat{\sigma}_5(k) / d_n$$

$$\rho_5 := (l_1 \hat{\sigma}_3(k) \hat{\sigma}_4(k) - l_2 \hat{\sigma}_5^2(k)) / d_n,$$

$$d_n := l_1 (\hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_3(k) \hat{\sigma}_4(k)) + l_1 l_2 \hat{\sigma}_5(k) (\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_4(k)).$$

第二振子の目標角加速度  $\ddot{r}_f$  を制御入力と考えた (17) 式のシステムにおいて、次の評価関数  $J$  を

$$\begin{cases} J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \ddot{r}_f^T R \ddot{r}_f) dt, & (\mathbf{Q} \geq 0, R > 0) \\ \mathbf{x}^T := [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad r_f \quad \dot{r}_f] \end{cases} \quad (20)$$

最小にするフィードバックゲイン  $F_o$  を制御周期毎に求め

$$\begin{cases} \ddot{r}_f = \mathbf{F}_o^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{F}_o^T := [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] \end{cases} \quad (21)$$

を更新する。

#### 6. ロバスト性を向上させた VSS 適応制御系

基本パラメータ推定における精度向上策の 1 つとして、VSS 制御と併行して摂動トルクを操作量に重畳させる手法が考えられる。ここでは、 $\sigma$ -修正法を応用して摂動信号に耐えられるロバスト性を向上した適応制御則を以下に示す。

[命題 2] (22) 式の VSS 適応制御の操作量に対し、パラメータ適応則を (23) 式とする。パラメータ  $\mathbf{p}$  は初期値を  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  とし、基本パラメータ推定値  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)$  を用いて (24) 式によって与えられるものとする。また、 $d_n \neq 0$  とする。

$$\begin{cases} i = \mathbf{Y}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}} - k_v \operatorname{sat}(s_c / \delta), & (k_v > 0) \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T := [\hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}_2 \quad \hat{\alpha}_3 \quad \hat{\alpha}_4] \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = k_a \boldsymbol{\phi} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y} s_c, & (k_a > 0, \mathbf{\Gamma} > 0) \\ \boldsymbol{\phi} := \mathbf{p} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{p}^T := [p_1 / d_n \quad p_2 / d_n \quad p_3 / d_n \quad p_4] \end{cases} \quad (23)$$

$$p_1 := \hat{\sigma}_1(k) \hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_3(k) - l_2^2 \hat{\sigma}_1(k) \hat{\sigma}_5^2(k) - l_1^2 (k) (\hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_5^2(k) + \hat{\sigma}_3(k) \hat{\sigma}_4^2(k) - 2l_2 \hat{\sigma}_4(k) \hat{\sigma}_5^2(k))$$

$$p_2 := (\hat{\sigma}_3(k) \hat{\sigma}_4(k) - \hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_5(k) + l_2 \hat{\sigma}_5(k) (\hat{\sigma}_4(k) - \hat{\sigma}_5(k))) \hat{\sigma}_1(k) g$$

$$p_3 := (l_1^2 \hat{\sigma}_4(k) (\hat{\sigma}_4(k) + \hat{\sigma}_5(k)) - \hat{\sigma}_1(k) \hat{\sigma}_2(k)) \hat{\sigma}_5(k) g$$

$$p_4 := \hat{\sigma}_6(k)$$

$$d_n := l_1 (\hat{\sigma}_2(k) \hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_3(k) \hat{\sigma}_4(k)) + l_1 l_2 \hat{\sigma}_5(k) (\hat{\sigma}_5(k) - \hat{\sigma}_4(k)) \quad (24)$$

ここで、 $k_v$  は VSS ゲイン、 $k_a$  はパラメータ誤差  $\boldsymbol{\phi}$  のゲイン、 $\mathbf{\Gamma}$  は適応則ゲインで対称行列とする。目標角  $r_f$  が安定に与えられ、(8) 式のシステム外乱に関する次の条件

$$|s_c| > \delta \text{ のとき, } |w| < k_v + k_a \|\boldsymbol{\phi}\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}) / \delta \quad (25)$$

$$|s_c| \leq \delta \text{ のとき, } |w| < k_a \|\boldsymbol{\phi}\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}) / \delta \quad (26)$$

の元で、 $t \rightarrow \infty$  で  $s_c \rightarrow 0$  即ち、 $e \rightarrow 0$  となり、第 2 振子角  $\theta_3$  は目標角  $r_f$  に追従する。□

#### 参考文献

中山裕介, 平田弘志, 大内茂人, 小野治: “回転型二重倒立振り子の適応制御系シミュレーション”, 第 27 回日本シミュレーション学会大会発表論文集, pp.405-408 (2008)